

Forord

Redaktør Hagen Jørgensen
År 2004
Best. nr.

Erhvervsskolernes Forlag

Munkehatten 28
5220 Odense SØ
Telefon 63 15 17 00
Telefax 63 15 17 33
E-mail ef@ef.dk
Internet www.ef.dk

Copyright

Enhver mangfoldiggørelse af tekst eller illustrationer er forbudt i henhold til Lov om ophavsret. Forbudet gælder alle former for mangfoldiggørelse ved trykning, fotografering og elektronisk databehandling.

Kontakt os!

For at kunne forbedre kommende udgaver vil vi meget gerne modtage kommentarer til bogen. Denne opfordring gælder alle brugere, lærere såvel som elever.



Undervisningsbanken

Denne bog er produceret ved hjælp af Erhvervsskolernes Forlags Undervisningsbank som findes på Internettet www.e-books.dk. I denne vidensdatabase ligger mere end 8.000 kapitler som kan sammensættes helt frit til bøger. Således kan en lærer nu blive redaktør og danne sit eget målrettede undervisningsmateriale.

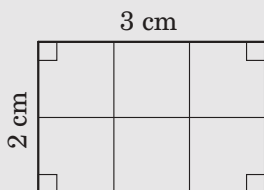
Indhold

Plangeometri	1
Rumgeometri	9
Konstruktion	17
Pythagoras	29
Trigonometri	35
Temaopgaver	51
Massefylde	53
Formelsamling	55
Facitliste	57

Plangeometri

Areal og omkreds

Rektangel



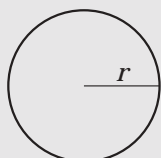
$$\text{Omkreds (O): } (3 + 2 + 3 + 2) \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

$$\text{Areal (A): } (3 \cdot 2) \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$$

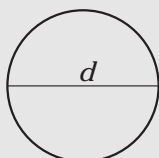
(Fladen består altså af 6 tern på hver 1 cm^2).

go060-01.cdr

Cirkel

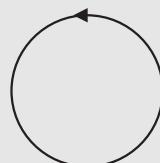


$r = \text{radius}$



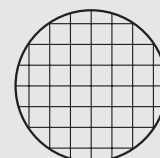
$d = \text{diameter}$

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r$$



$O = \text{omkreds}$
(Længden rundt om cirklen)

$$A = \pi \cdot r^2$$

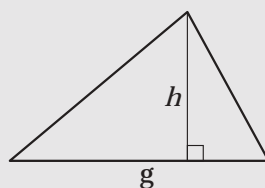
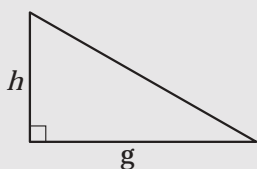


$A = \text{areal}$
(Det antal tern, fladen består af)

$\pi = 3,1415927$ (π er den konstant, man skal gange en cirkels diameter med for at finde omkredsen af cirklen ($O = \pi \cdot d$))

go060-02.cdr

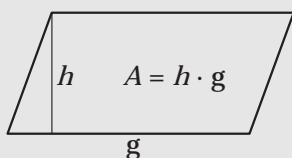
Trekant



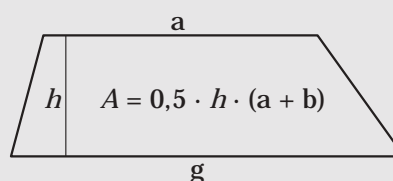
$$\text{Areal (A)} = 0,5 \cdot h \cdot g$$

go060-03.cdr

Parallelogram



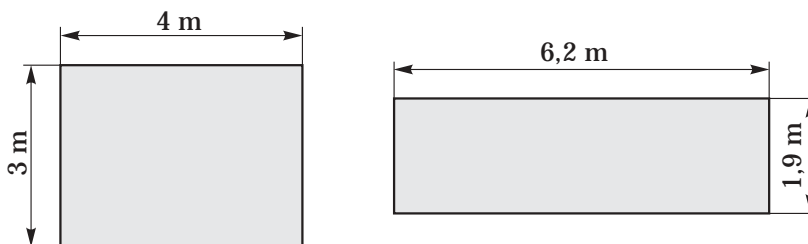
Trapez



go060-03.cdr go060-05.cdr

Opgaver

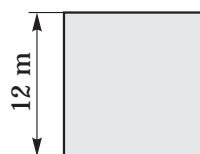
1. Beregn areal og omkreds af disse 2 rektangler.



go060-06.cdr

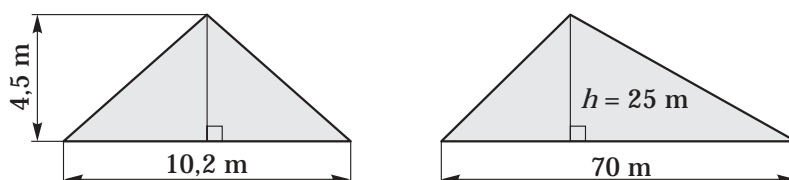
2. Beregn areal og omkreds af dette kvadrat.

3. Beregn omkreds og areal af et kvadrat med siden 7,5 m.



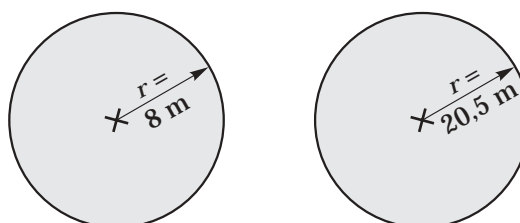
go060-07.cdr

4. Beregn arealet af disse 2 trekanter.



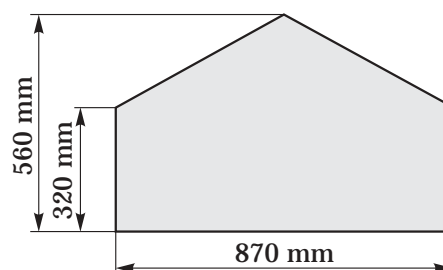
go060-08.cdr

5. Beregn omkreds og areal af disse 2 cirkler.



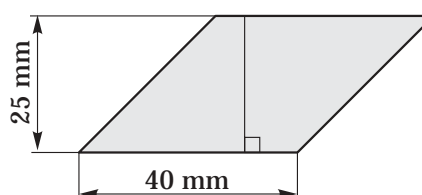
go060-09.cdr

6. En plade ser ud som på tegningen. Beregn pladens areal.



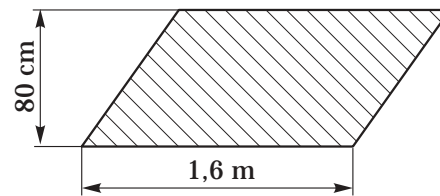
go060-10.cdr

7. Beregn arealet af parallelogrammet.



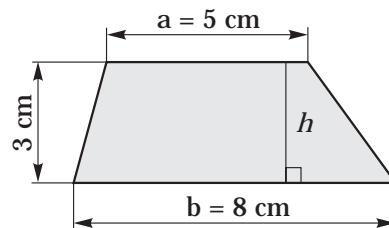
go060-11.cdr

8. Beregn det skraverede areal.



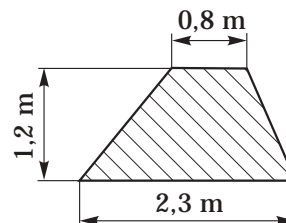
go060-12.cdr

9. Beregn arealet af trapezet.



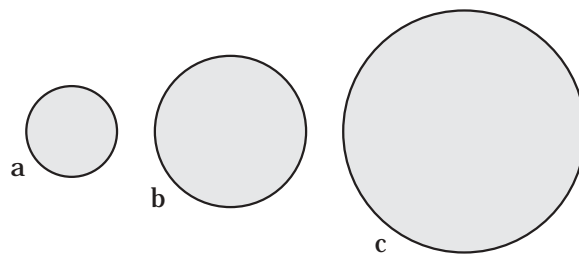
go060-13.cdr

10. Beregn det skraverede areal.



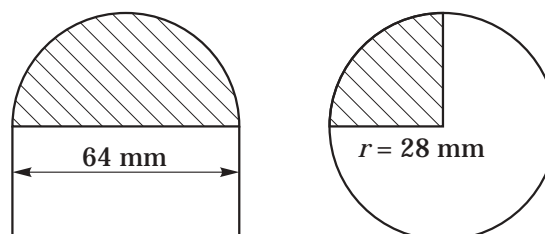
go060-14.cdr

11. Mål diameteren, og beregn omkreds og areal af disse 3 cirkler



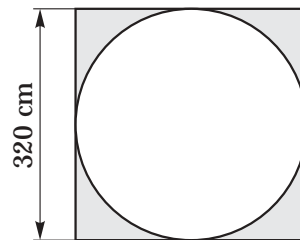
go060-15.cdr

12. Beregn de skraverede arealer på de 2 tegninger.



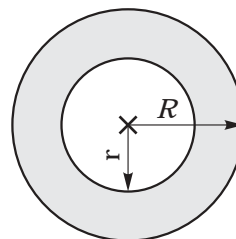
go060-16.cdr

13. Tegningen viser en kvadratisk plade.
 a. Beregn kvadratpladens areal.
 b. Beregn cirkelpladens areal.
 c. Hvor stort er spildet?



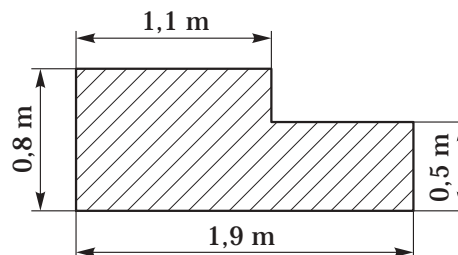
go060-17.cdr

14. Tegningen viser 2 koncentriske cirkler (cirkler, som har samme centrum).
 $R = 23$ mm og $r = 18$ mm.
 Hvor stort er det farvede areal?



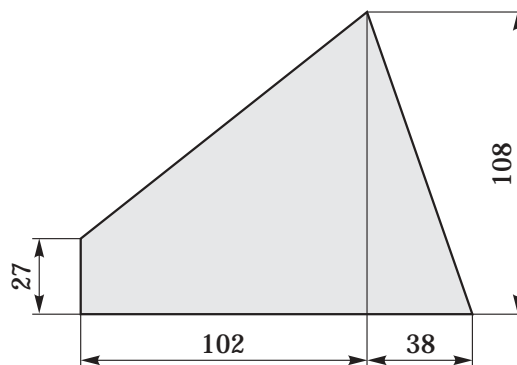
go060-18.cdr

15. En plade udskæres efter mål, som vist på tegningen.
 Hvor stor er pladens areal?



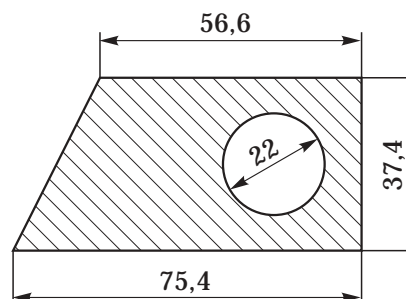
go060-19.cdr

16. Tegningen viser en udskåret pladedel.
 Bestem pladens areal.
 Alle mål er i mm.



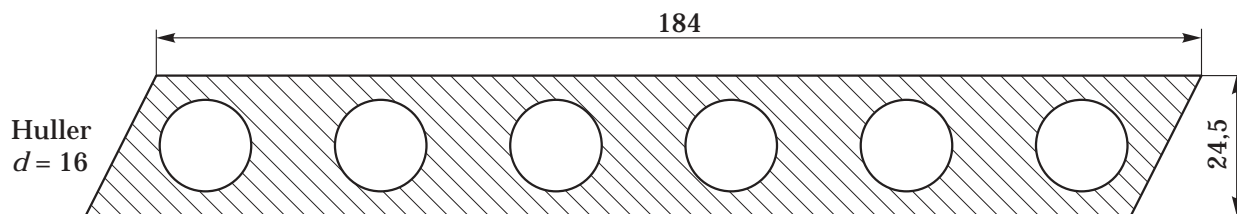
go060-20.cdr

17. En plade har mål som tegningen.
 Alle mål er i mm.
 Beregn det skraverede areal.



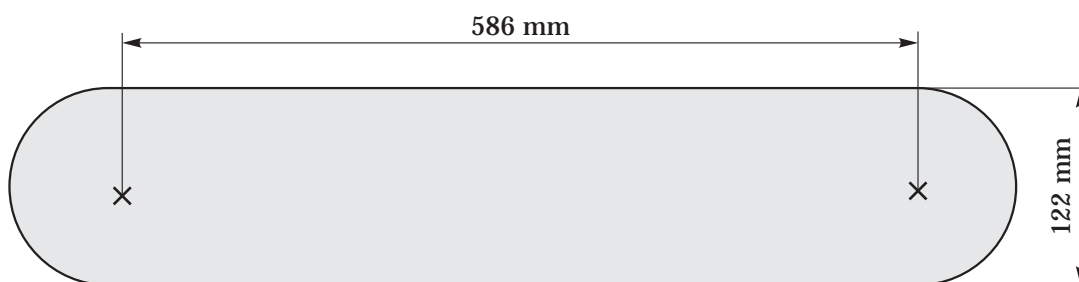
go060-21.cdr

18. Beregn arealet af det skraverede område på nedenstående plade (mål i mm).



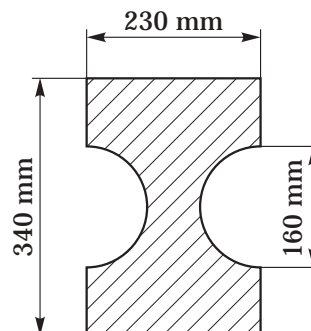
go060-22.cdr

19. Beregn omkreds og areal af det farvede område.



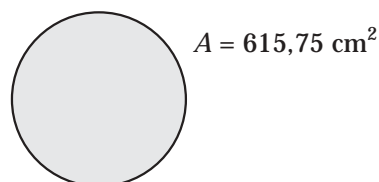
go060-23.cdr

20. Tegningen viser en udskåret plade.
Beregn pladens areal.



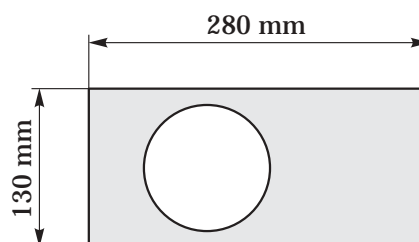
go060-24.cdr

21. Arealet af en cirkel er $615,75 \text{ cm}^2$
b. Beregn cirkelns radius.
c. Beregn cirkelns omkreds.



go060-25.cdr

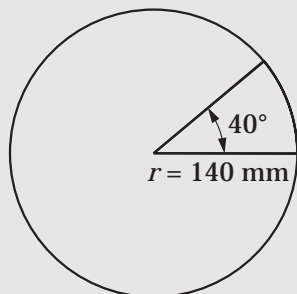
22. Rektanglet på tegningen har et areal, der er 3 gange så stort som cirkelns.
Beregn cirkelns radius.



go060-26.cdr

Kegler

Beregning af cirkelbue



Længden af den cirkelbue, de 40° spænder over, ønskes beregnet.

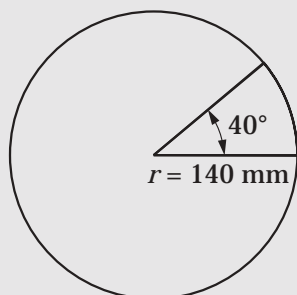
Cirkelens omkreds beregnes:

$$O = 879,65 \text{ mm}$$

$$\text{Cirkelbuen: } \frac{40}{360} \cdot 879,65 \text{ mm} = 97,74 \text{ mm}$$

go060-27.cdr

Beregning af cirkeludsnit



Arealet af det cirkeludsnit, de 40° spænder over, ønskes beregnet.

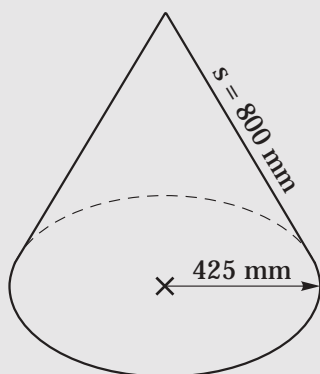
Cirkelens areal beregnes:

$$A = 61\,575,22 \text{ mm}^2$$

$$\text{Areal af cirkeludsnit: } \frac{40}{360} \cdot 61\,575,22 \text{ mm}^2 = 6\,841,69 \text{ mm}^2$$

go060-27.cdr

Beregning af overflade



Overfladen af en kegle beregnes med formelen:

$$O = \pi \cdot r \cdot s$$

hvor r = radius i keglens grundflade og s = keglens sidelængde.

Eksempel

$$O = \pi \cdot 425 \text{ mm} \cdot 800 \text{ mm}$$

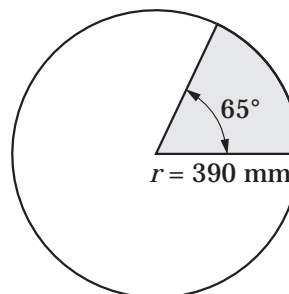
$$O = 1\,068\,141,5 \text{ mm}^2$$

go060-28.cdr

Opgaver

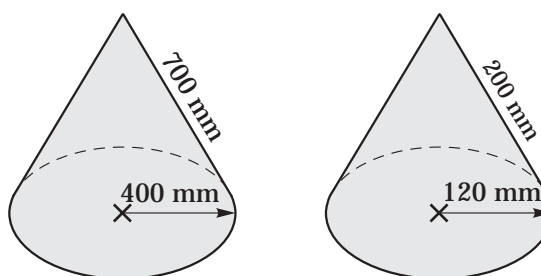
23. Et cirkeludsnit (65°) skæres af en cirkelformet plade.

- Beregn cirkeludsnittets areal.
- Beregn længden af den cirkelbue, de 65° spænder over.



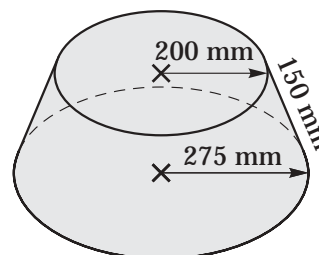
go060-29.cdr

24. Beregn den krumme overflade af de 2 kegler.



go060-30.cdr

25. Hvor mange mm^2 plade skal anvendes for at fremstille denne keglestub med bund og låg?



go060-31.cdr

26. På et værksted skal der udklippes et emne til en keglekonstruktion. Emnet er et cirkelring-udsnit.

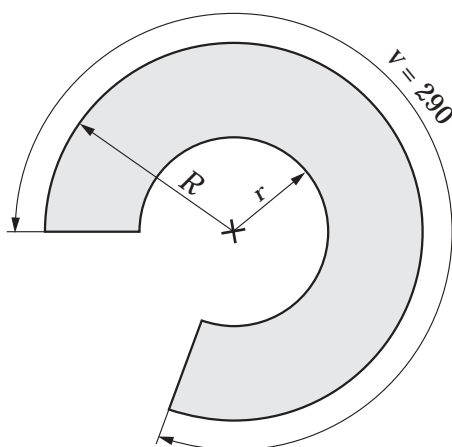
Emnet har disse mål:

$$r = 175 \text{ mm}$$

$$R = 350 \text{ mm}$$

$$v = 290^\circ$$

På et værksted vælges en pladestørrelse på $1\,000 \times 2\,000 \text{ mm}$. Hvor stor en procentdel af pladen udnyttes?

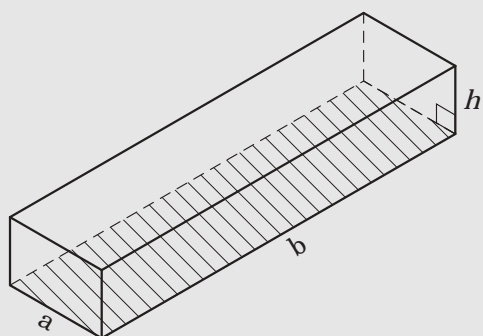


go060-32.cdr



Rumgeometri

Beregning af rumfang (V)



$$V = G \cdot h$$

V = rumfang

G = grundfladens areal

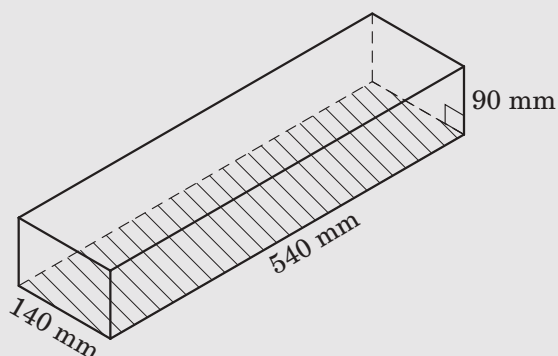
h = højden

NB

Højden skal altid stå vinkelret på grundfladen. Bemærk ved tegningen:

Grundfladen (G) = a · b Højden = h

Eksempel



$$V = G \cdot h$$

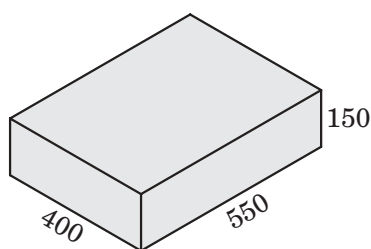
$$V = (140 \text{ mm} \cdot 540 \text{ mm}) \cdot 90 \text{ mm}$$

$$V = 6\,804\,000 \text{ mm}^3$$

go061-01.cdr

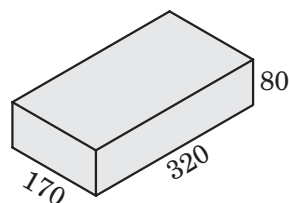
Opgaver

1. Beregn rumfang (V) af en kasse med målene:
 Længde = 550 mm
 Bredde = 400 mm
 Højde = 150 mm



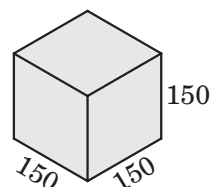
go061-02.cdr

2. En kasse har dimensionerne 80 mm, 170 mm og 320 mm.
- Beregn kassens rumfang.
 - Beregn kassens samlede overflade.



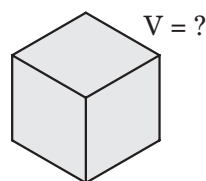
go061-03.cdr

3. Beregn rumfanget af en terning, hvis kantlængde er 150 mm.



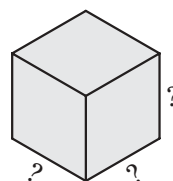
go061-04.cdr

4. Beregn rumfanget af terninger, hvis kantlængde er:
- 2,6 cm
 - 105 mm
 - 0,8 m
 - 12 dm



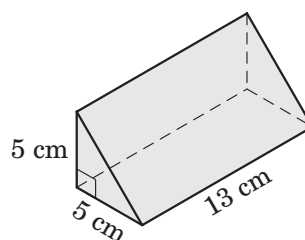
go061-05.cdr

5. Beregn kantlængden i en terning, hvis rumfang er:
- 27 mm^3
 - 125 cm^3
 - $12\,167 \text{ mm}^3$
 - $274,625 \text{ cm}^3$
 - $2\,197 \text{ m}^3$
- (Prøv at finde $\sqrt[3]{}$ på din lommeregner).



go061-06.cdr

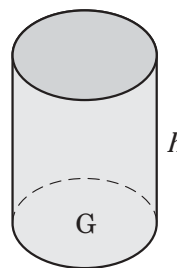
6. En glasprisme har mål, som vist på tegningen.
- Beregn prismets rumfang. Massefylden for glas er: $2,6 \text{ g/cm}^3$.
 - Beregn prismets masse.



go061-07.cdr

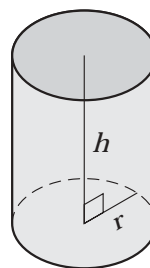
7. Hvilken masse vil prismet i opgave 6 have, hvis det er fremstillet i jern? Massefylde for jern er $7,86 \text{ G/cm}^3$.

8. Udregn rumfanget af en cylinder, hvis:
- Grundfladen (G) har arealet 68 cm^2 , og højden er 18 cm lang.
 - Grundfladen (G) har arealet 94 cm^2 , og højden er 12,7 cm lang.
 - Grundfladen (G) har arealet 288 cm^2 , og højden er 6,6 dm lang.



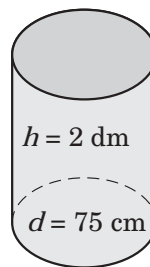
go061-08.cdr

9. En cylinder har højden 44 cm. Beregn rumfanget af cylinderen, hvis radius i grundfladen er:
- 12 cm
 - 7,8 dm
 - 1,2 m



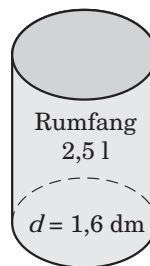
go061-09.cdr

10. En cylindrisk olietønde har indvendige mål, som vist på tegningen. Massefylde olie: $0,9 \text{ g/cm}^3$. Den tomme tønde vejer 28,5 kg.
- Hvor mange liter kan tønden rumme?
 - Hvor meget vejer tønde + olie samlet?



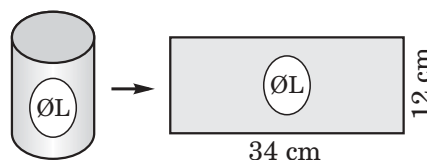
go061-10.cdr

11. En fabrik skal fremstille cylindriske dåser. Dåserne skal kunne rumme 2,5 liter. Diameteren på dåsen skal være 1,6 dm. Hvor høj skal dåsen være?



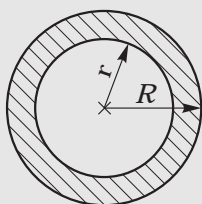
go061-11.cdr

12. Den krumme overflade på en cylindrisk dåse foldes ud. Målene er, som vist på tegningen. Hvor stort er dåsens rumindhold i liter?



go061-12.cdr

Rør



Tegningen viser tværsnittet af et metalrør: Arealet af tværsnittet (skraveret) udregnes med formlen:

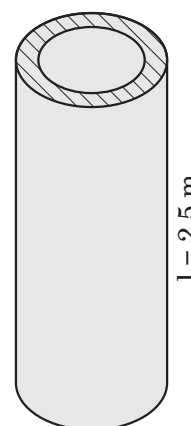
$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

go061-13.cdr

Opgaver

13. Tegningen viser et rør.

- Beregn tværsnitsarealet (skraveret) af det skitserede rør, når $R = 13,5$ mm og $r = 11,0$ mm.
- Beregn rumfanget af jernmassen, når længden af røret er 2,5 m.
- Beregn rørets masse, når massefylden for jern er $7,86 \text{ g/cm}^3$.
($7,86 \text{ g/cm}^3 = 7,86 \text{ kg/dm}^3 = 7,86 \text{ t/m}^3$).
- Røret fyldes med olie (massefylde: $0,9 \text{ g/cm}^3$).
Hvor mange cm^3 olie kan røret indeholde?
- Hvad vejer olien?

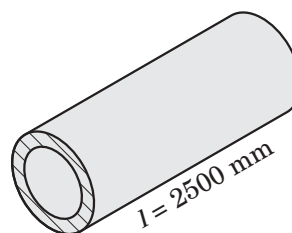


go061-14.cdr

14. Beregn massen af et jernrør, hvor:

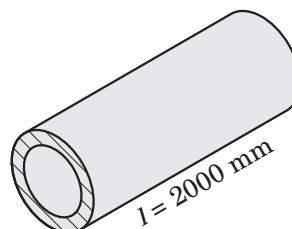
$$R = 26 \text{ mm og}$$

$$r = 20 \text{ mm}$$



go061-15.cdr

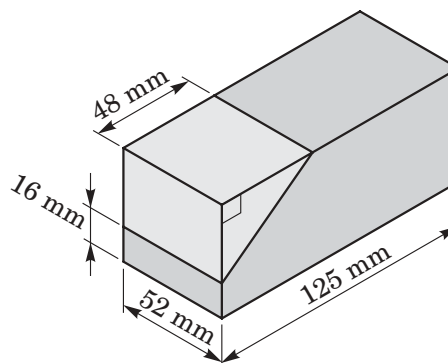
15. Et metalrør med massen 616,51 g har en udvendig radius (R) = 6 mm og en indvendig radius (r) = 5 mm. Hvilket metal er røret fremstillet af?



go061-16.cdr

Hammerhoved

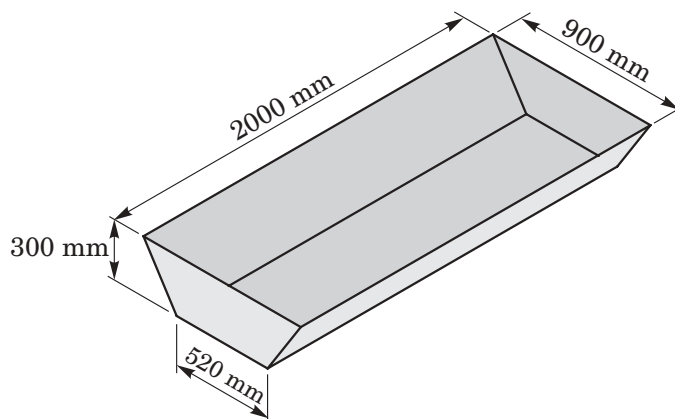
16. Af et stykke firkantstål med kvadratisk endeflade skal der fremstilles et hammerhoved ved at save en kile af.
Beregn massen af hammerhovedet, når kilen er fjernet.
(Massefylde: $7,86 \text{ g/cm}^3$).



go061-17.cdr

Beholder

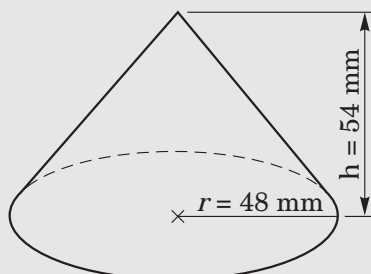
17. Tegningen viser de indvendige mål i en beholder med trapez-formet endeflade.
Beregn, hvor mange liter beholderen kan rumme.



go061-18.cdr

Kegler

Beregning af rumfang (V)

*Eksempel*

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 48^2 \cdot 54$$

$$V = 130\,288,13 \text{ mm}^3$$

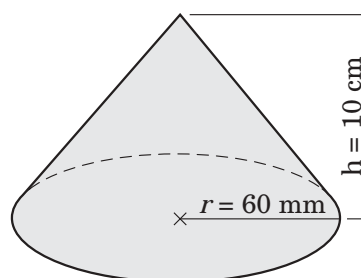
go061-19.cdr

Opgaver

18. Tegningen forestiller en massiv kegle, der er lavet i et stykke metal.

Keglen vejer 1 018 gram.

- Beregn rumfanget af keglen.
- Find metallets massefylde.
- Hvilket metal er keglen lavet af?

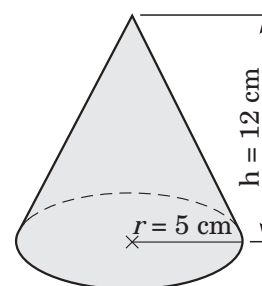


go061-20.cdr

19. En massiv plastickomponent har form som en kegle.

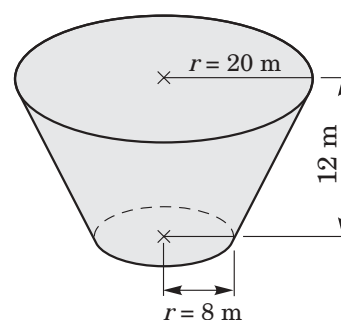
Keglen er 12 cm høj og har en radius i grundfladen på 5 cm.

Beregn keglens samlede masse, når det oplyses, at den anvendte type plastic har massefylden $0,9 \text{ g/cm}^3$.



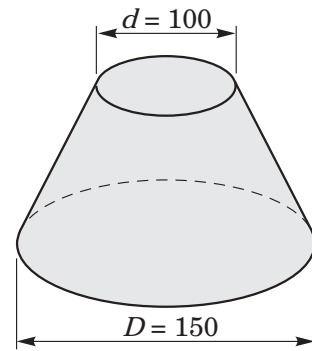
go061-21.cdr

20. Tegningen forestiller et vandtårns vandbeholder (indvendige mål). Beregn hvor mange m^3 vand (helt tal), tårnet kan rumme.



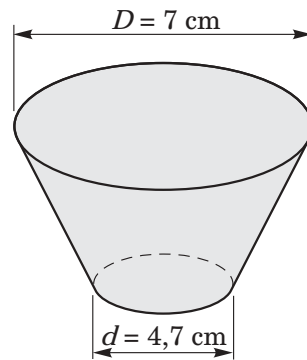
go061-22.cdr

21. En oliekanne skal fremstilles som en keglestub. Kanden skal kunne indeholde 1,7 liter. Diameteren foroven skal være $d = 100$ mm og forneden $D = 150$ mm (indvendige mål).
- Bestem kandes højde.
 - Bestem kandes krumme overflade.



go061-23.cdr

22. Et engangsbæger med form som en keglestub har følgende mål:
- $$d = 4,7 \text{ cm}$$
- $$D = 7,0 \text{ cm}$$
- $$h = 8,5 \text{ cm}$$



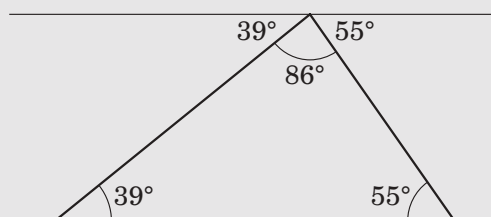
go061-24.cdr



Konstruktion

Polygoners vinkelsum

En trekants vinkelsum er 180° , idet:

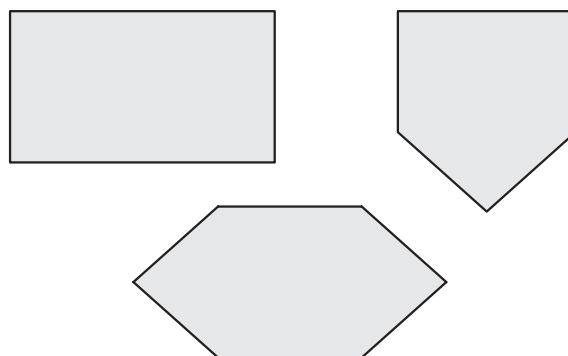


Alle andre polygoner kan opdeles i trekant ved at tegne samtlige diagonaler fra en af polygonens vinkler.

go061-01.cdr

Opgaver

- Tegn på et stykke papir en firkant, en femkant og en sekskant. Tegn derefter diagonalerne (fra én af vinklerne) i denne firkant, femkant og sekskant.

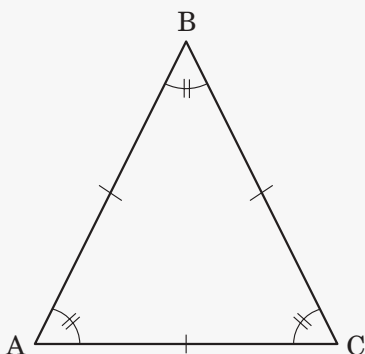
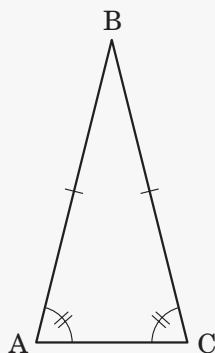
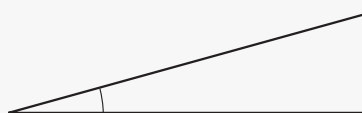
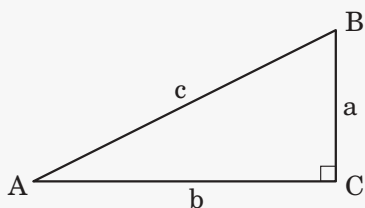


go063-02.cdr

- Tegn derefter et skema i lighed med nedenstående, prøv at udlede en formel for vinkelsummen i en polygon og beregn til sidst vinkelsummen i en 100-kant.

n-kant	trekant	firkant	femkant	sekskant	tikant
Antal trekanter	1				
Vinkelsum	180°				

Trekanter



Trekanter vinkler benævnes med store bogstaver.

Trekanter sider kan benævnes med små bogstaver.

Hvis en trekants ene vinkel er 90° , kaldes trekanten *retvinklet*.

En vinkel i en trekant skal være større end 0° og mindre end 180° .

180° er en ret linje.

En vinkel mellem 0° og 90° kaldes en *spids vinkel*.

En vinkel mellem 90° og 180° kaldes en *stump vinkel*.

En trekant, hvor to af benene er lige lange, kaldes en *ligebenet trekant*.

De to vinkler ved grundlinjen AC er lige store.

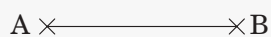
Vinkel B kaldes *topvinklen*.

En trekant, hvis sider er lige lange, kaldes en *ligesidet trekant*.

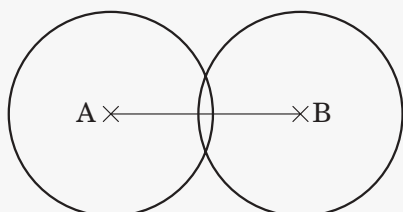
I en ligesidet trekant er alle vinklerne 60° .

Konstruktion af midtnormal

Et linjestykkes midtnormal er en linje, der står vinkelret på linjestykket og deler linjestykket i 2 lige store stykker.

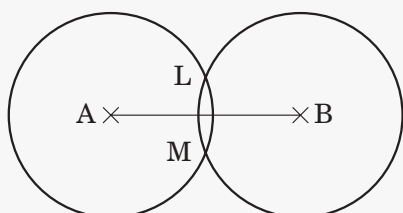


1. Start med at afsætte linjen AB.



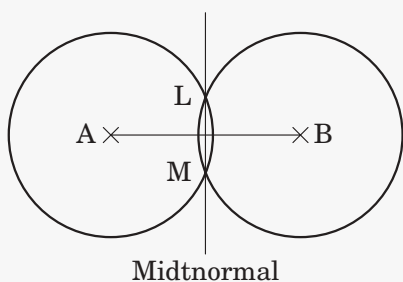
2. Afsæt godt halvdelen af linjens længde i passeren.

Tegn nu to cirkelbuer med denne radius. Først med centrum i A, og så med centrum i B.



3. Cirkelbuerne skærer hinanden i punkterne L og M.

Tegn den linje, der går gennem punkterne L og M.



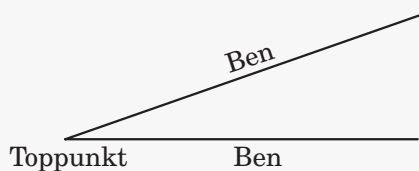
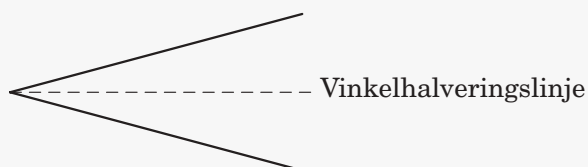
4. Linjen gennem L og M kaldes linje AB's *midtnormal*.

Midtnormalen står vinkelret på linjen AB.

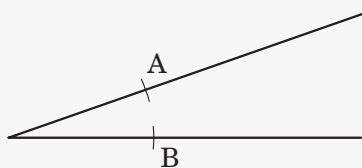
Midtnormalen deler linjen AB i 2 lige store dele.

Konstruktion af vinkelhalveringslinje

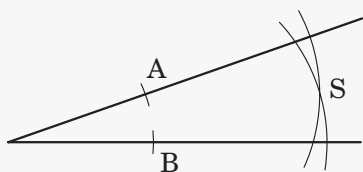
En vinkelhalveringslinje er en linje, der halverer en vinkel.



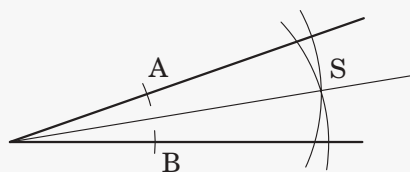
1. Tegn først en vilkårlig vinkel.



2. Sæt passeren i vinklens toppunkt, og tegn en cirkelbue, der skærer begge ben. De to skæringspunkter kaldes A og B.

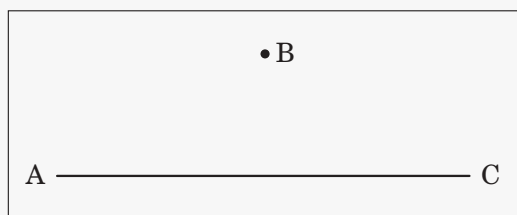


3. Flyt passeren til henholdsvis A og B, og tegn en cirkelbue fra hver, så de skærer hinanden mellem vinklens ben. Skæringspunktet kaldes S.

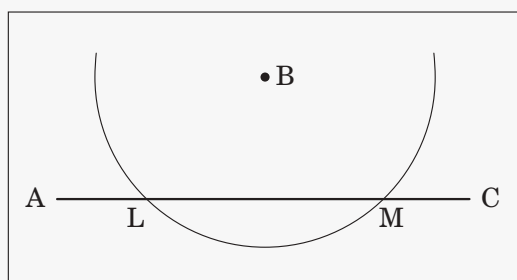


4. Tegn en ret linje, der går gennem S og vinklens toppunkt. Denne linje er *vinkelhalveringslinjen*.

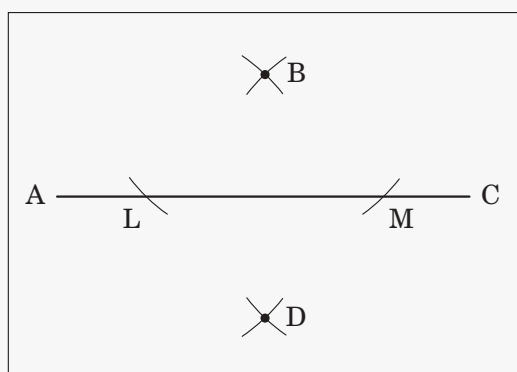
Konstruktion af højde



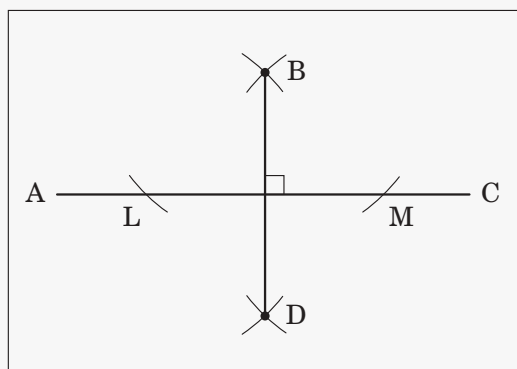
1. Tegn linjen AC og punktet B.



2. Sæt passeren i punktet B, og tegn en cirkelbue, der skærer linjen AC 2 forskellige steder (L og M).

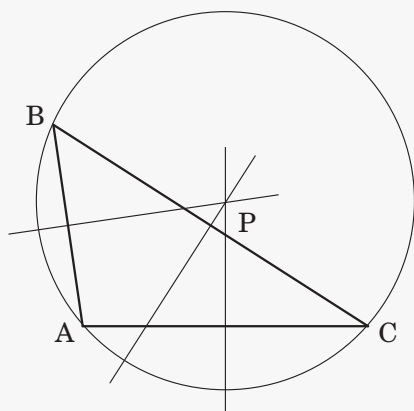


3. Behold samme radius i passeren. Sæt passeren i punkterne L og M, og tegn buestreger over og under linjen AC. De skærer hinanden i punktet B og det tilsvarende punkt D (på den anden side AC).



4. Punkterne B og D forbindes med en linje. Linjen står vinkelret på AC. En del af linjen er *højde* i $\triangle ABC$.

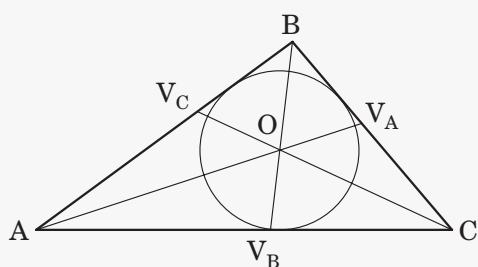
Konstruktion af en trekants omskrevne cirkel



Tegn en vilkårlig trekant ABC.
 Konstruer midnormalerne til trekantens sider.
 Sæt passeren i midnormalernes skæringspunkt P, og tegn trekantens *omskrevne cirkel*.

go063-07.cdr

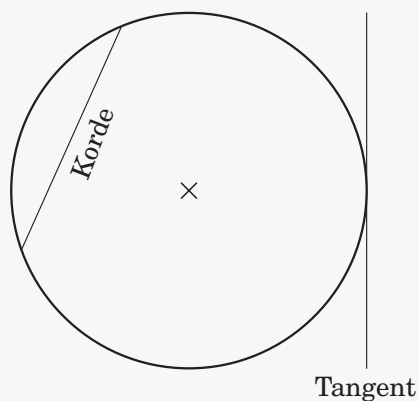
Konstruktion af en trekants indskrevne cirkel



Tegn en vilkårlig trekant ABC.
 Konstruer trekantens vinkelhalveringslinjer.
 Sæt passeren i vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt, og tegn trekantens *indskrevne cirkel*.

go063-08.cdr

Korde og tangent



En *tangent* er en linje, der rører en cirkel i kun ét punkt.
 En *korde* er et linjestykke, der går fra ét punkt på cirkelperiferien til et andet. (Diameteren er en korde, der går gennem centrum).

go063-09.cdr

Konstruktion af Eulers linje

Opgave

3. Tegn en vilkårlig trekant ABC (ikke for lille):
- Konstruer midtnormalerne til trekantens sider.
 - Konstruer trekantens 3 højder.
 - Konstruer trekantens medianer
Medianerne går fra en vinkelspids til midten af den modstående side).

Konstatering

Midtnormalerne skærer hinanden i samme punkt (M).

Højderne skærer hinanden i samme punkt (H).

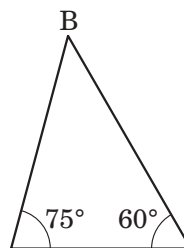
Medianerne sskærer hinanden i samme punkt (D).

- Tegn den linje, der går gennem punkterne M, H og D.
- Er linjen en ret linje?

Beregning af vinkler

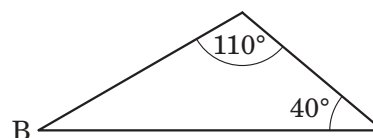
Opgaver

4. Beregn vinkel B.



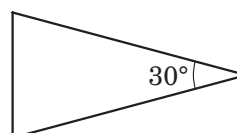
go063-10.cdr

5. Hvor stor er vinkel B?



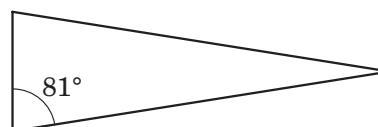
go063-11.cdr

6. I en ligebenet trekant er topvinklen 30° .
Beregn de 2 vinkler ved grundlinjen.



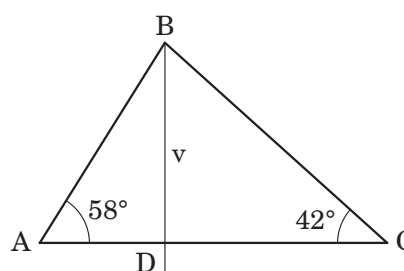
go063-12.cdr

7. I en ligebenet trekant er en af vinklerne ved grundlinjen 81° .
Beregn de øvrige vinkler.



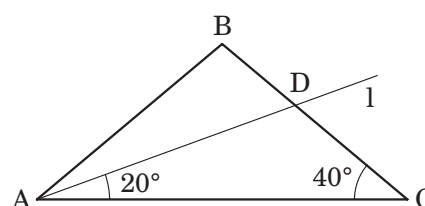
go063-13.cdr

8. Vinkel B's halveringslinje hedder v.
a. Beregn vinkel ABD.
b. Beregn vinkel BDC.



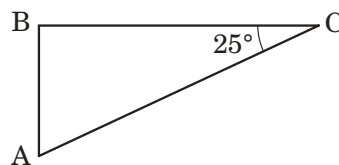
go063-14.cdr

9. Linjen »l« er vinkelhalveringslinje til vinkel A.
Beregn:
a. Vinkel BAD
b. Vinkel ADC
c. Vinkel ABC
d. Vinkel BDA



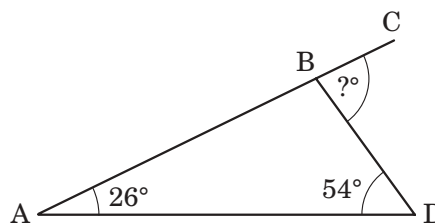
go063-15.cdr

10. Hvor stor er vinkel A, når vinkel B er ret?



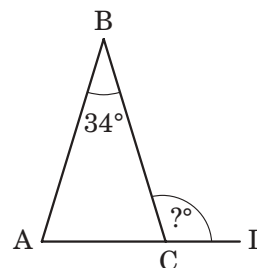
go063-16.cdr

11. Hvor stor er vinkel DBC?



go063-17.cdr

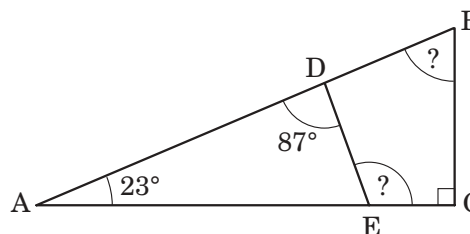
12. Trekant ABC er ligebenet.
Beregn vinkel BCD.



go063-18.cdr

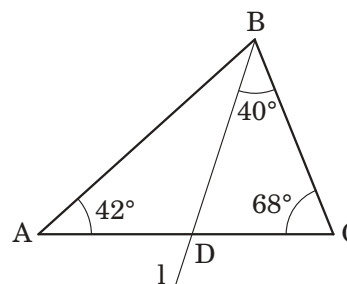
13. I den retvinklede trekant ABC tegnes linjen DE.

- a. Hvor stor er vinkel ABC?
- b. Hvor stor er vinkel DEC?



go063-19.cdr

14. Er linjen »l« vinkelhalveringslinje til vinkel B?



go063-20.cdr

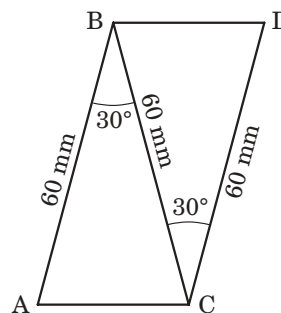
15. Hvor stor er hver vinkel i en ligesidet trekant?

16. Hvor store er vinklerne i en ligebenet, retvinklet trekant?

Vinkler, areal og masse

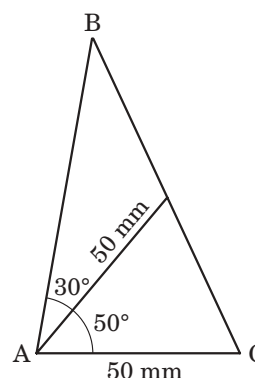
Opgaver

17. Beregn vinkel A og vinkel ACB.
 Beregn vinkel D.
 Alle længdemål er i mm.
 Konstruer firkanten.



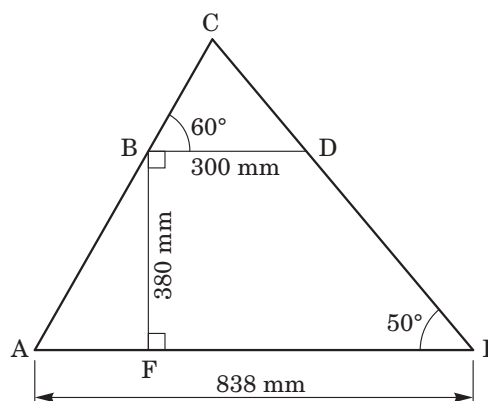
go063-21.cdr

18. Beregn vinkel C.
 Beregn vinkel B.



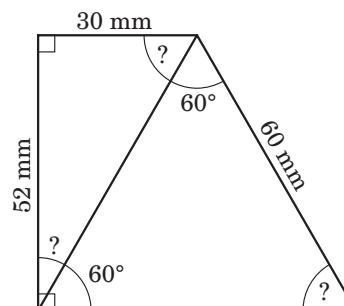
go063-22.cdr

19. Af en trekantet plade ACE udskæres en trapezformet pladedel ABDE.
 Beregn:
 a. Vinkel EDB
 b. Vinkel ABF
 c. Vinkel A
 d. Vinkel C
 e. Pladen ABDE's areal



go063-23.cdr

20. Tegningen viser en 6 mm kobberplade.
 a. Beregn de manglende vinkler på tegningen
 b. Beregn pladens masse.
 (Massefylde kobber: $8,92 \text{ g/cm}^3$).



go063-24.cdr

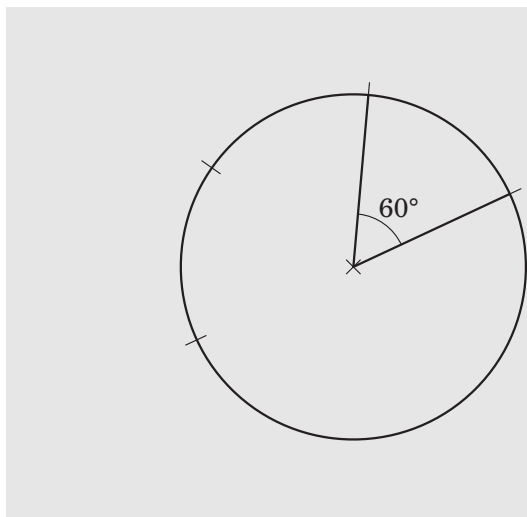
Konstruktion

Det er altid en god ide at tegne en prøvefigur, før der konstrueres.

21. Konstruer trekant ABC, når $AC = 60$ mm, $BC = 40$ mm og vinkel $C = 90^\circ$.
22. Konstruer en ligesidet trekant, hvis omkreds skal være 90 mm.
23. Konstruer firkant ABCD ud fra følgende oplysninger: $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm og $AD = CD = 3$ cm.
24. Konstruer en trekant ABC, hvori vinkel $B = 0^\circ$, $AB = 60$ mm og $AC = 50$ mm.
25. Konstruer en trekant ABC, hvori vinkel $C = 110^\circ$, $CA = 5$ cm og $CB = 6$ cm.
26. Konstruer trekant ABC ud fra følgende oplysninger: $BC = 7,5$ cm, vinkel $B = 80^\circ$ og vinkel $C = 105^\circ$.
27. Vinkel A er 60° , vinkel C er 80° og linjestykket AC er 9 cm.
Konstruer trekanten, og mål siden AB.
28. Konstruer en retvinklet $\triangle ABC$, hvor vinkel $B = 35^\circ$ og $AC = 50$ mm.
Konstruer $\triangle ABC$'s indskrevne cirkel.
29. Konstruer $\triangle ABC$, hvor $AC = 60$ mm, vinkel $B = 52^\circ$ og vinkel $C = 42^\circ$.
 - a. Konstruer $\triangle ABC$'s omskrevne cirkel.
 - b. Mål radius i den omskrevne cirkel.
 - c. Beregn cirkelens omkreds og areal.
30. Konstruer trekant KLM, hvor $KL = 80$ mm, $KM = 90$ mm og vinkel $K = 63^\circ$.
Konstruer $\triangle KLM$'s tyngdepunkt (medianernes skæringspunkt).
31. Konstruer et parallelogram ABCD, hvor vinkel $A = 40^\circ$, $AD = 50$ mm og $AB = 40$ mm.
Find gradtallet for vinklerne B, C og D.
32. Konstruer trekant DEF, hvor vinkel $D = 61^\circ$, $DE = 70$ mm og $EF = 65$ mm.
(Konstruer begge løsninger).

Konstruktion uden brug af vinkelmåler

Vinkel på 60°



Radius til en cirkel anvendes, når vi fx konstruerer en vinkel på 60° . Centrum markeres, radius afsættes i passeren og en cirkel tegnes. Passeren flyttes nu ud på cirkelperiferien. Afsæt nu et mærke med passeren på cirkelperiferien. Flyt til mærket, og gentag. Vinkelbenene fra centrum og til de to mærker er nu 60° .

go063-25.cdr

Opgaver

Prøv nu selv at konstruere følgende vinkler uden brug af vinkelmåler (brug vinkelhalveringslinjer).

33. Konstruer en vinkel på 60° .
34. Konstruer en vinkel på 75° .
35. Konstruer en vinkel på $37,5^\circ$.
36. Konstruer en vinkel på 45° .
37. Konstruer en vinkel på $82,5^\circ$.
38. Konstruer en trekant, hvor vinkel $A = 45^\circ$, siden $b = 60$ mm og vinkel $B = 60^\circ$.
Konstruer trekantens omskrevne cirkel.

□

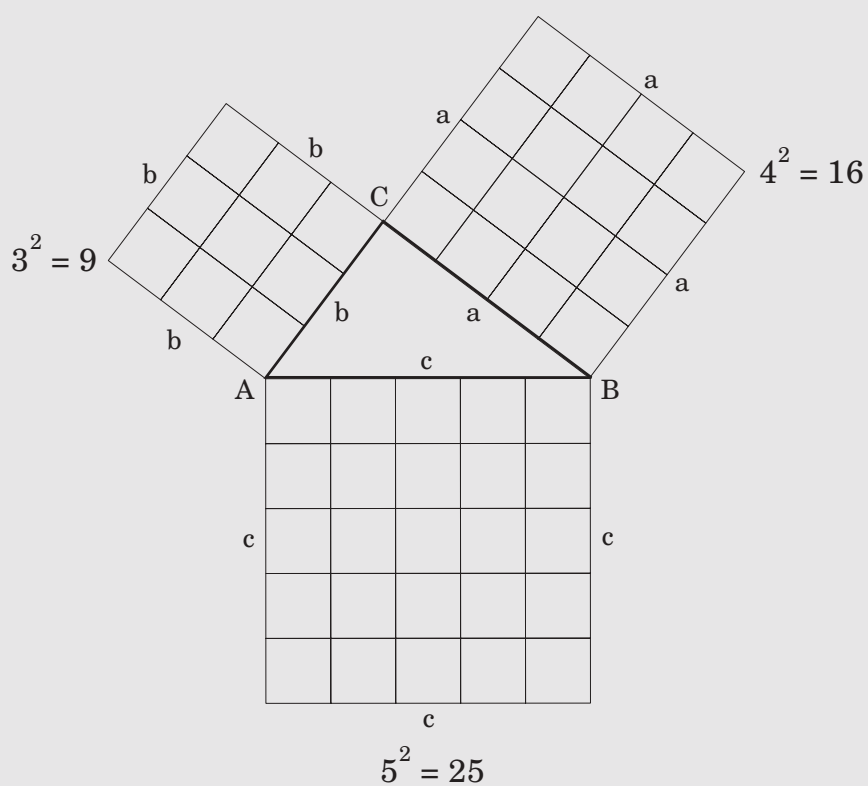
Pythagoras

Pythagoras læresætning

Pythagoras var en græsk filosof, der slog sig ned på Sicilien omkring år 500 før vor tidsregning. (Filosof betyder: »Den, der dyrker visdom«).

Han fandt bevis for det, vi i dag kalder » Den pythagoræiske læresætning«.

Bevis 1



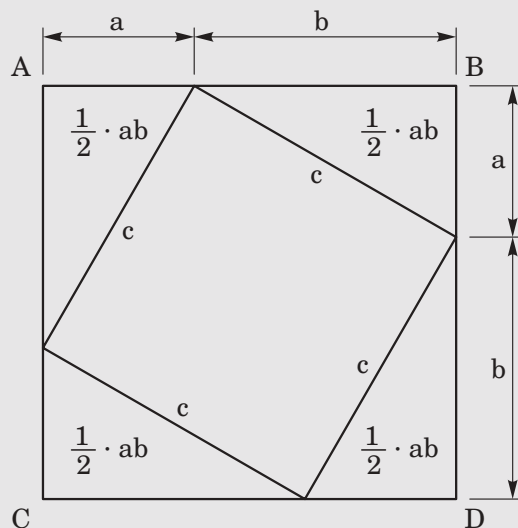
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 4^2 + 3^2 &= 5^2 \\ 16 + 9 &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ c^2 - a^2 &= b^2 \\ c^2 - b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

go061-01.cdr

Bevis 2

Her er en anden måde at bevise »Den pythagoræiske læresætning« på.

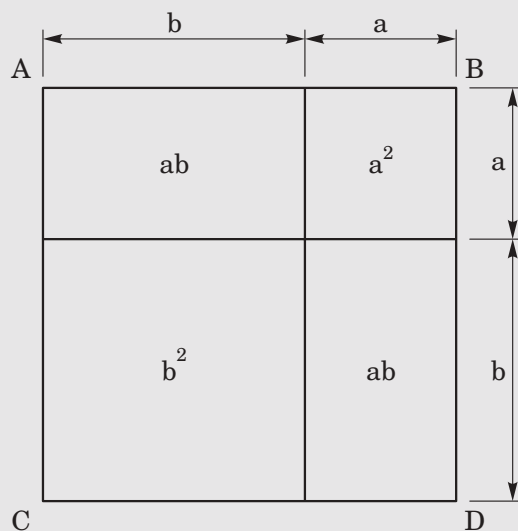


1. Af denne tegning kan ses:

$$\text{Areal } \square ABCD =$$

$$c \cdot c + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b =$$

$$c^2 + 2ab$$



2. Af denne tegning kan ses:

$$\text{Areal } \square ABCD =$$

$$a \cdot a + b \cdot b + a \cdot b + a \cdot b =$$

$$a^2 + b^2 + 2ab$$

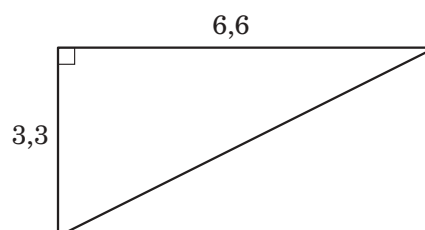
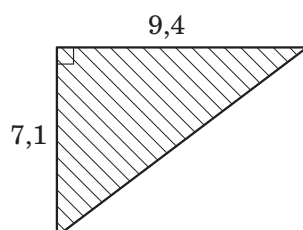
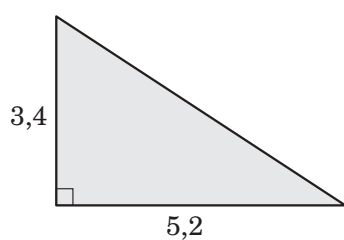
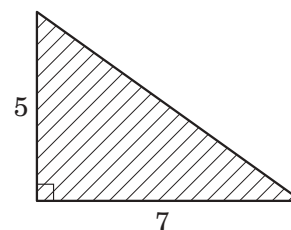
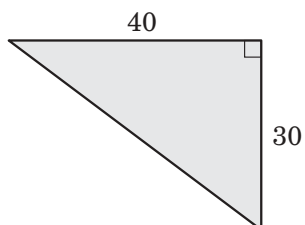
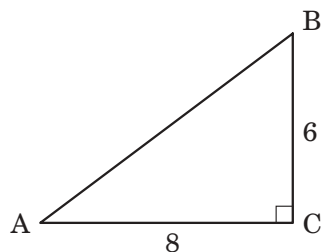
3. Sammenlign de 2 udtryk for areal $\square ABCD$:

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

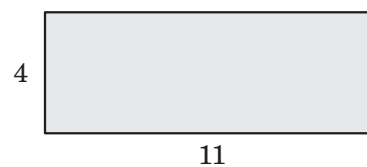
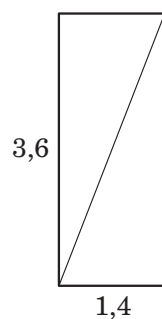
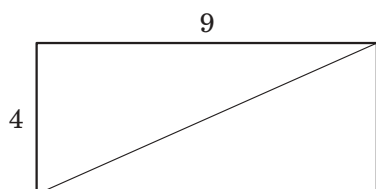
Opgaver

1. Beregn længden af hypotenusen i disse trekanter.



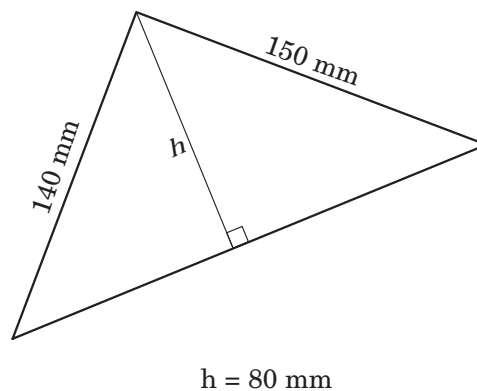
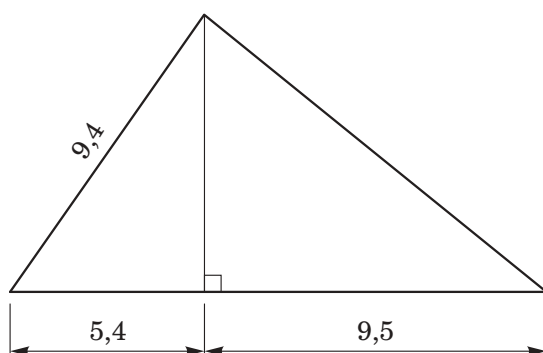
go064-04.cdr

2. Beregn diagonalerne i disse 3 rektangler (1 decimal).



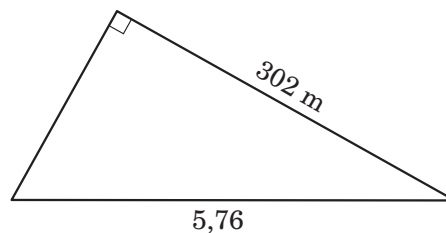
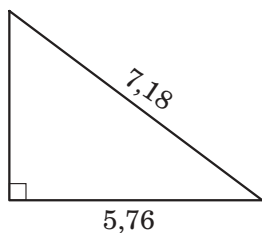
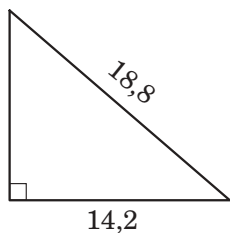
go064-05.cdr

3. Beregn arealet af disse 2 trekanter (1 decimal).



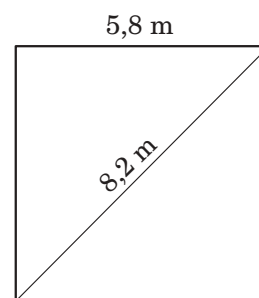
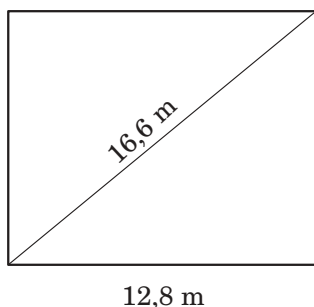
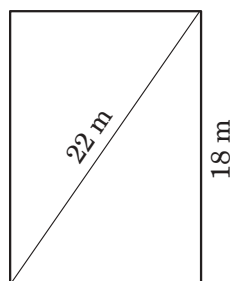
go064-06.cdr

4. Beregn længden af den manglende side i disse retvinklede trekanter.



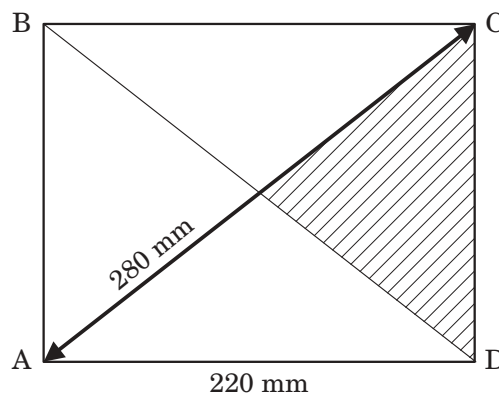
go064-07.cdr

5. Beregn arealet af disse rektangler (1 decimal).



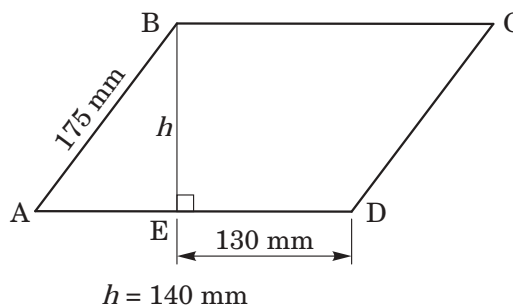
go064-08.cdr

6. Af en rektangulær plade bortskæres en trekantet pladedel (skraveret).
Længden AC er 280 mm.
Beregn arealet af den skraverede pladedel (helt antal mm²).



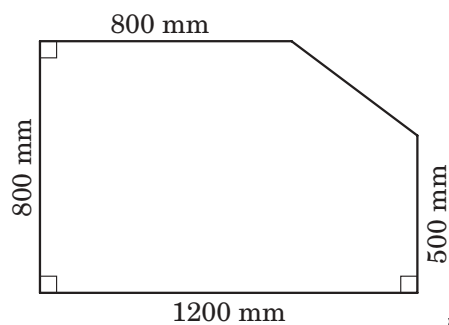
go064-09.cdr

7. Tegningen viser et parallellogram.
a. Beregn længden af AE.
b. Find arealet af parallellogrammet.
c. Find omkredsen af parallellogrammet.
d. Hvis denne figur skal udskæres af en rektangulær plade, hvor stort vil spillet så mindst være?



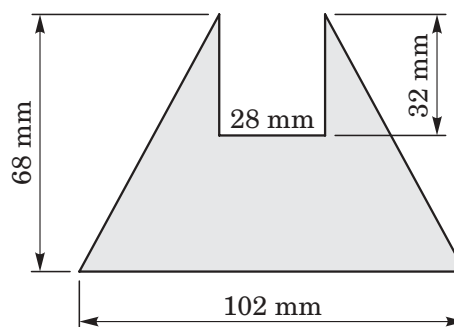
go064-10.cdr

8. I en ligesidet trekant har siderne længden 80 mm.
Beregn længden af højden i trekanten.
9. Siden i et kvadrat er 86 mm.
Beregn længden af en diagonal (1 decimal)
10. Denne tegning er en skitse af en plade.
a. Beregn pladens areal.
b. Beregn pladens omkreds.



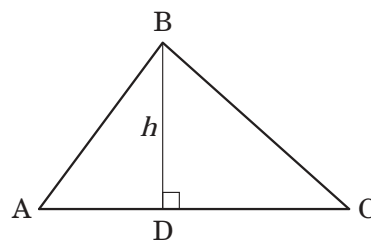
jo064-11.cdr

11. Tegningen viser en pladedel.
Beregn pladens omkreds og areal.



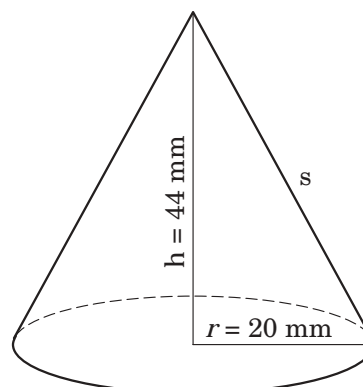
go064-12.cdr

12. Arealet af $\triangle ABC$ er 660 mm^2 .
Længden af DC er 41 mm.
Højden er 22 mm.
Beregn omkredsen af trekanten.



go064-13.cdr

13. Tegningen viser en kegle.
a. Beregn keglens krumme overflade.
b. Beregn keglens rumfang.

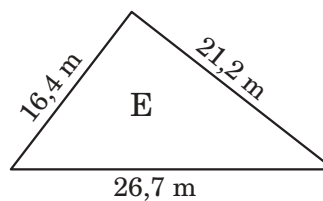
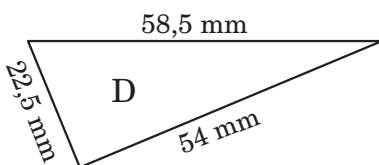
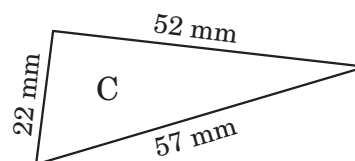
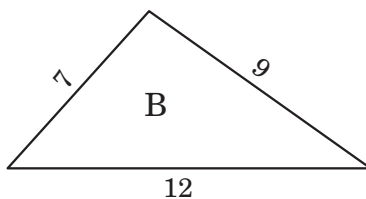
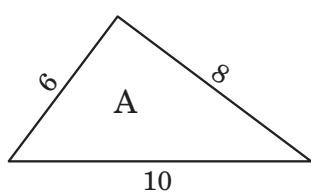


go064-14.cdr

Den omvendte Pythagoras

Den omvendte Pythagoras. (Hvis $a^2 + b^2 = c^2$ er trekanten retvinklet).

14. Hvilke af disse 5 trekanter er retvinklede?

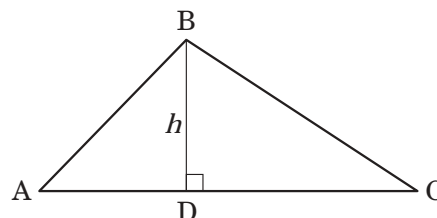


go064-15.cdr

15. I $\triangle ABC$ er følgende givet:

$$|AB| = 3,6 \text{ m}, |BC| = 4,8 \text{ m} \text{ og } h = 2,4 \text{ m}$$

Er $\triangle ABC$ retvinklet?

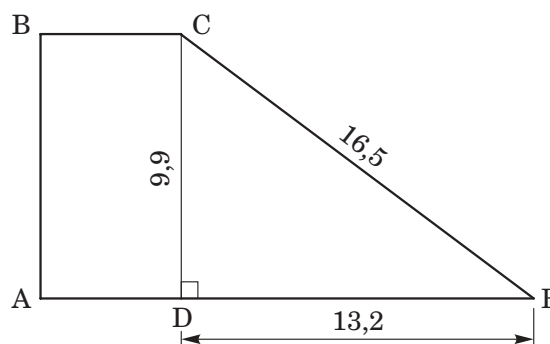


go064-16.cdr

16. Er firkant ABCD et rektangel eller et parallelogram?

$$|AD| = |BC| \text{ og } AD \parallel BC$$

$$|AB| = |CD| \text{ og } AB \parallel CD$$

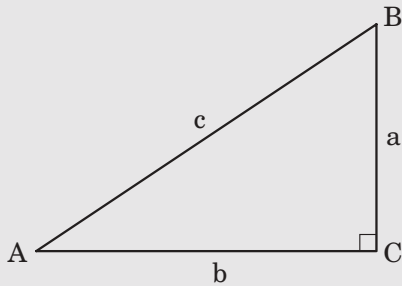


go064-17.cdr

□

Trigonometri

Om trekanter



Vinkler skrives med store bogstaver.

Sider skrives med små bogstaver.

a = en katete

b = en katete

c = hypotenusen

go065-01.cdr

Opgaver

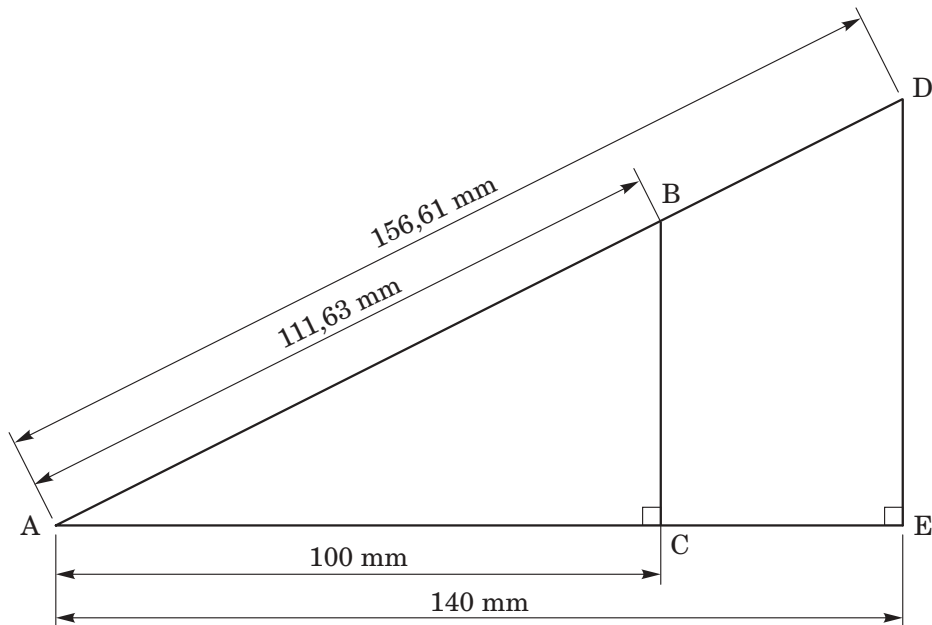
1. Hvad hedder vinkel A's hosliggende katete?
2. Hvad hedder vinkel A's modstående katete?
3. Hvad hedder vinkel B's hosliggende katete?
4. Hvad hedder vinkel B's modstående katete?
5. Hvad hedder a's modstående vinkel?
6. Hvad hedder b's modstående vinkel?
7. Hvad hedder b's hosliggende vinkler?
8. Hvad hedder a's hosliggende vinkler?

Ligedannede trekanter

9. Beregn $|BC|$ og $|DE|$, når:

$$|BC| = 111,63 \text{ og } |BC| = 100$$

$$|AD| = 156,61 \text{ og } |AE| = 140$$



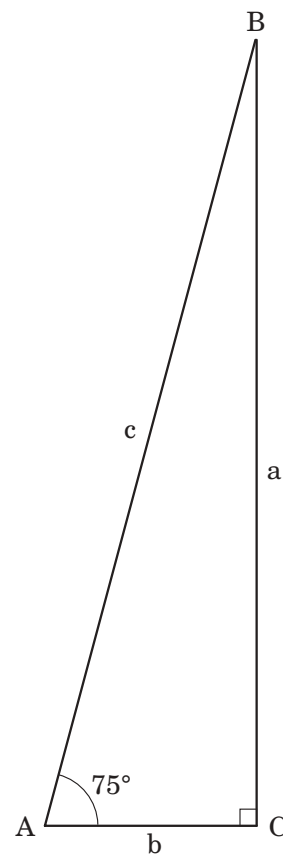
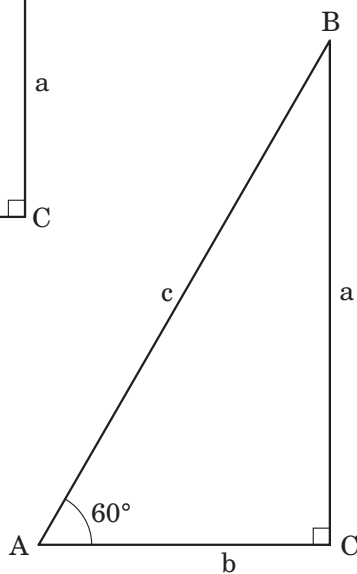
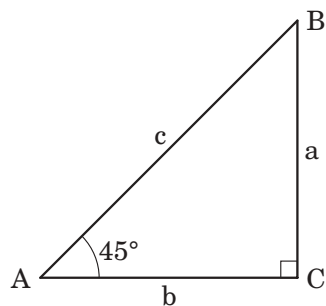
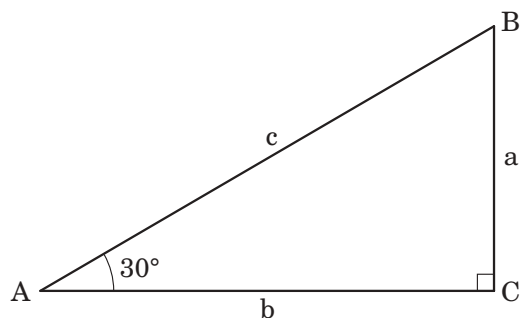
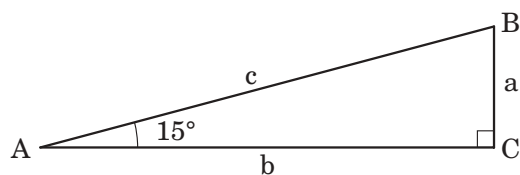
go065-02.cdr

10. Skriv tallene ind i et skema som herunder, og udregn (2 decimaler).

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|}$$

$$\underline{\quad} = \underline{\quad} = \underline{\quad} \Rightarrow \underline{\quad} = \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

Forholdet mellem siderne i en trekant



go065-03.cdr

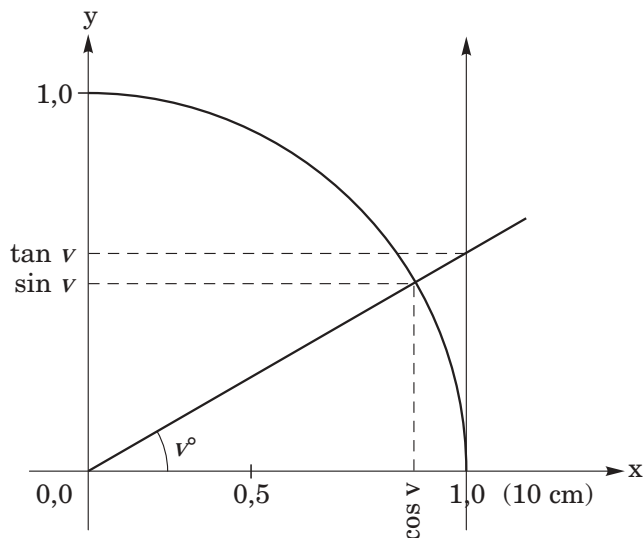
Øvelse

Ovenstående tegninger er målfaste. Brug lineal, og mål trekanternes sider. Tegn nedenstående skema på et stykke papir, og skriv målene i felterne. Udfør til sidst divisionerne i kolonne 1, 2 og 3.

				1	2	3
A	a	b	c	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{b}$
15°				0,26	0,97	0,27
30°						
45°						
60°						
75°						

Sinus, cosinus og tangens

Fremstil nedenstående tegning på millimeterpapir (radius i cirkelbuen = 10 cm).



sin v aflæses på y-aksen
tan v aflæses på y-aksen
cos v aflæses på x-aksen

go065-04.cdr

Tegn nedenstående skema på et stykke papir.

Afsæt dernæst nedenstående vinkler på millimeterpapiret, og aflæs de tilsvarende værdier for: sin v , cos v og tan v .

	1	2	3
Vinkel v	sin v	cos v	tan v
0°			
15°			
30°			
45°			
60°			
75°			
90°			

Sammenlign kolonne 1, 2 og 3 med kolonne 1, 2 og 3 på foregående side.

Trigonometri for den retvinklede trekant

Efter at have sammenlignet skemaerne på de 2 foregående sider kan vi nu sammenfatte følgende:

$$\sin v = \frac{\text{Vinklens modstående side}}{\text{Hypotenusen}}$$

$$\cos v = \frac{\text{Vinklens hosliggende side}}{\text{Hypotenusen}}$$

$$\tan v = \frac{\text{Vinklens modstående side}}{\text{Vinklens hosliggende side}}$$

Opgaver

11. Tegn nedenstående skema på et stykke papir.

Find ved hjælp af lommeregneren funktionsværdierne til følgende vinkler:

Vinkel v	$\sin v$	$\cos v$	$\tan v$
18°			
37°			
58°			
89°			

Hvad sker der med henholdsvis sinus-, cosinus- og tangensværdierne, når vinklen vokser?

12. Find ved hjælp af lommeregneren vinklen til følgende funktionsværdier:

- | | | |
|------------------|------------------|---------------|
| a. $\sin 0,2355$ | b. $\sin 0,9247$ | c. $\sin 0,5$ |
| d. $\cos 0,2355$ | e. $\cos 0,9247$ | f. $\cos 0,5$ |
| g. $\tan 0,2355$ | h. $\tan 0,9247$ | i. $\tan 0,5$ |

13. Find følgende funktionsværdier:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| a. $\sin v$, når $v = 16,3^\circ$ | b. $\sin v$, når $v = 26,8^\circ$ |
| c. $\sin v$, når $v = 79,8^\circ$ | d. $\cos v$, når $v = 12,3^\circ$ |
| e. $\cos v$, når $v = 67,7^\circ$ | f. $\cos v$, når $v = 85,9^\circ$ |
| g. $\tan v$, når $v = 13,4^\circ$ | h. $\tan v$, når $v = 87,4^\circ$ |

Løs følgende ligninger, og find det ubestemte led.

Eksempel

$$\sin v = \frac{7,6458}{9,2541} \Rightarrow v = 55,71^\circ$$

14. $\sin v = \frac{7,6458}{9,2541}$

15. $\cos v = \frac{137}{155}$

16. $\tan v = \frac{1,625}{0,171}$

17. $\sin 36,5^\circ = \frac{a}{1,353}$

18. $\sin v = \frac{0,805}{1,353}$

19. $\cos 87,3^\circ = \frac{b}{3,14}$

20. $\cos B = \frac{0,15}{3,14}$

21. $\tan 89^\circ = \frac{a}{14,6}$

22. $\tan B = \frac{836,4}{14,6}$

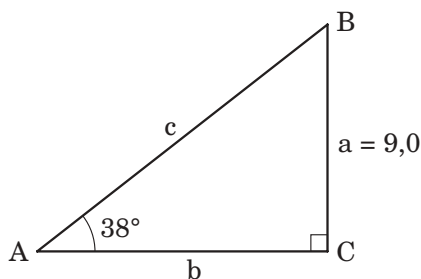
23. $\sin 36,5^\circ = \frac{0,805}{b}$

24. $\tan 2^\circ = \frac{1701}{b}$

25. $\cos 46,3^\circ = \frac{2,15}{b}$

Trigonometriske beregninger

Eksempel



Find vinkel B, hypotenusen c og siden b.

go065-05.cdr

a. Vinkel B: $B = 90^\circ - 38^\circ \Rightarrow \underline{\underline{52^\circ}}$

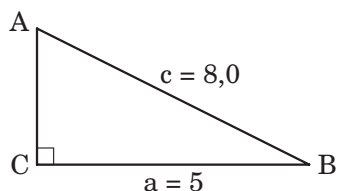
b. Hypotenusen c: $\sin 38^\circ = \frac{9,0}{c} \Rightarrow c = \frac{9,0}{\sin 38^\circ} \Rightarrow c = 14,6184 \Rightarrow \underline{\underline{14,62}}$

c. Siden b: $\cos 38^\circ = \frac{b}{14,6184} \Rightarrow \cos 38^\circ \cdot 14,6184 \Rightarrow b = \underline{\underline{11,52}}$

$$\sin v = \frac{\text{Modstående side}}{\text{Hypotenusen}} \quad \cos v = \frac{\text{Hosliggende side}}{\text{Hypotenusen}} \quad \tan v = \frac{\text{Modstående side}}{\text{Hosliggende side}}$$

Opgaver

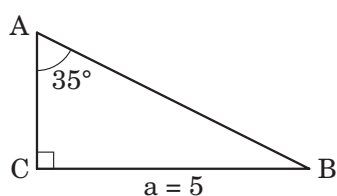
26.



go065-06.cdr

Beregn vinkel A.
Beregn vinkel B.
Beregn siden b.

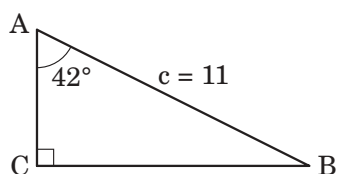
27.



go065-07.cdr

Beregn siden c.
Beregn vinkel B.
Beregn siden b.

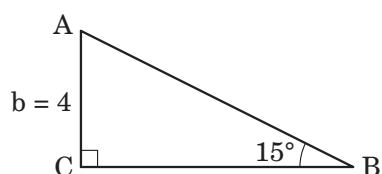
28.



go065-08.cdr

Beregn siden a.
Beregn vinkel B.
Beregn siden b.

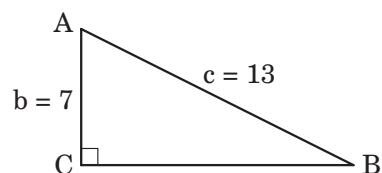
29.



go065-09.cdr

Beregn vinkel A.
Beregn siden a.
Beregn siden c.

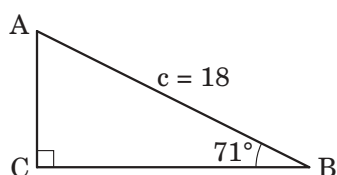
30.



go065-10.cdr

Beregn vinkel B.
Beregn siden a.
Beregn vinkel A.

31.

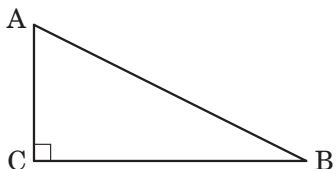


go065-11.cdr

Beregn siden a.
Beregn siden b.
Beregn vinkel A.

$$\sin v = \frac{\text{Modstående side}}{\text{Hypotenusen}} \quad \cos v = \frac{\text{Hosliggende side}}{\text{Hypotenusen}} \quad \tan v = \frac{\text{Modstående side}}{\text{Hosliggende side}}$$

32.

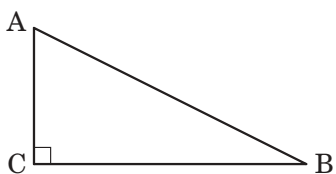


$$A = 27^\circ \quad c = 5$$

Beregn a, B og b.

go065-12.cdr

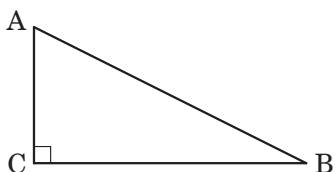
33.



$$a = 4 \quad c = 6$$

Beregn a, B og b.

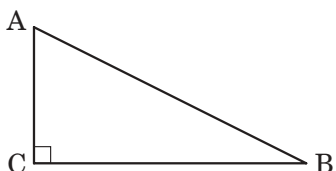
34.



$$A = 29^\circ \quad a = 15$$

Beregn c, B og b.

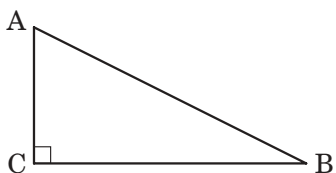
35.



$$b = 8 \quad c = 15$$

Beregn B, a og A.

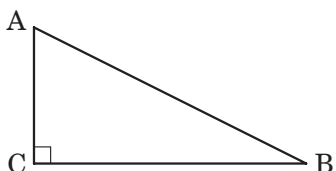
36.



$$c = 18 \quad B = 38^\circ$$

Beregn B, a og A.

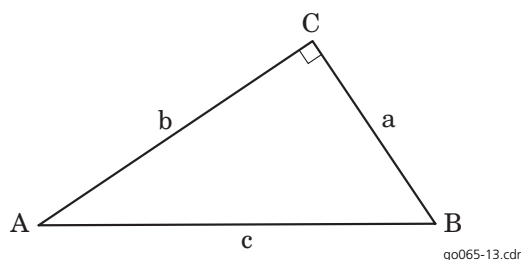
37.



$$b = 7,50 \quad B = 53,35^\circ$$

Beregn c, A og a.

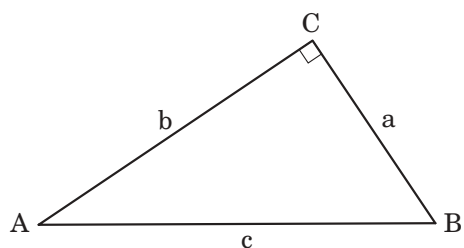
38.



Beregn de ukendte stykker i den retvinklede trekant ABC, når:

$A = 63^\circ$ og
 $a = 12,57$ cm

39.



Beregn de ukendte stykker i den retvinklede trekant ABC, når:

$a = 5$ cm og
 $b = 12$ cm

40. $A = 36,8^\circ$, $c = 6,38$ mm og $C = 90^\circ$.

Beregn a og b.

41. $B = 35,7^\circ$, $b = 19,3$ dm og $C = 90^\circ$.

Find vinkel A og siderne a og c.

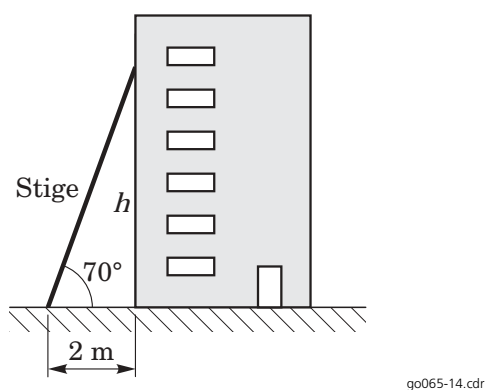
42. $a = 25,1$ mm, $b = 12,3$ mm og $C = 90^\circ$.

Find vinklerne A og B og siden c.

43. $B = 37,2^\circ$, $C = 90^\circ$ og $c = 182$ mm.

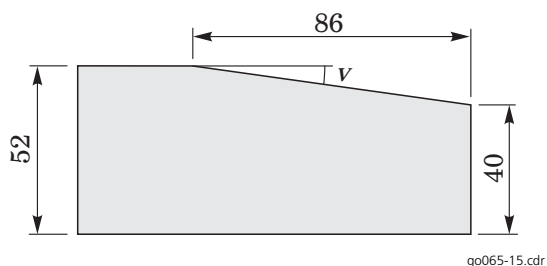
Beregn trekantens areal.

44.



Hvor højt (h) når stigen op?

45.

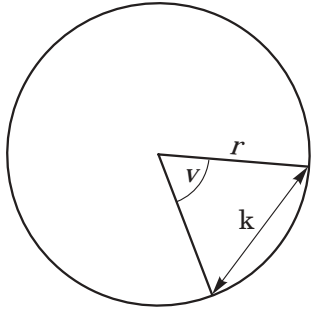


Enden af et stykke firkantstål bankes ud som vist på tegningen.

Mål i mm.

Beregn vinklen (v).

46.

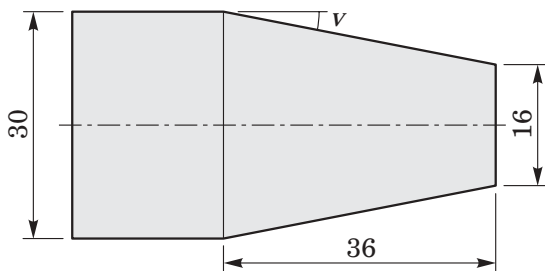


go065-16.cdr

I forbindelse med udkæringen af et stykke plade til en røghat ønskes korden (k) bestemt.

Beregn længden af korden, når $r = 180$ mm og $v = 46^\circ$

47.

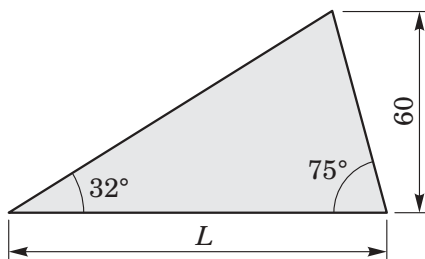


go065-17.cdr

Enden af en aksel er udformet, som vist på tegningen.

Beregn vinkel v .

48.



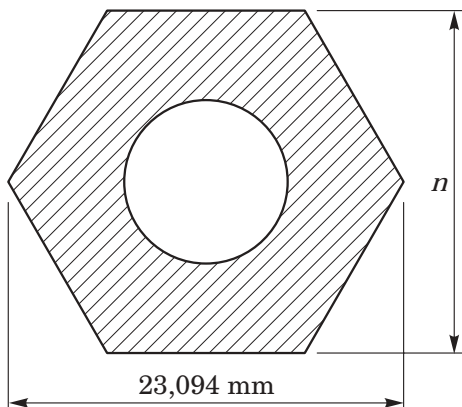
go065-18.cdr

Beregn længden L .

Bestem længden af de manglende sider.

Mål i mm.

49.

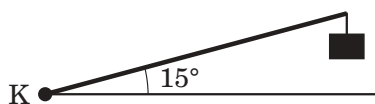


go065-19.cdr

Tegningen viser en møtrik.

Beregn nøglevidden n .

50.



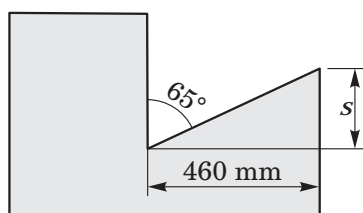
go065-20.cdr

En kran fremstilles, så den er i stand til at udføre arbejde i et vinkelinterval mellem 15° og 80° .

Længden på kranens arm er 14 m.

Beregn den korteste og længste vandrette afstand fra kranen (K), hvor kranens arm er i stand til at virke.

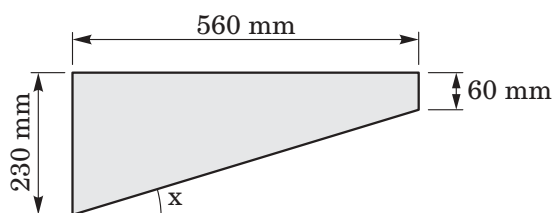
51.



go065-21.cdr

Beregn længden af s på skitsen.

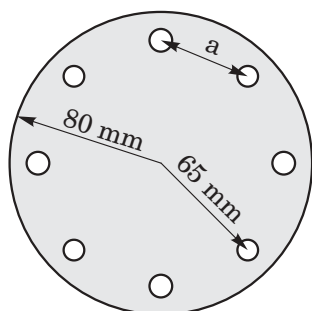
52.



go065-22.cdr

Beregn vinklen x .

53.



go065-23.cdr

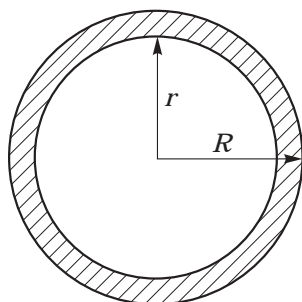
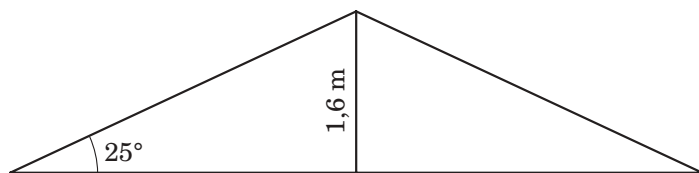
I en flange bores 8 huller ($\varnothing 12$ mm).

Der er lige stor afstand mellem hullerne.

a. Beregn den lige afstand a mellem to hullers centrum.

b. Konstruer flangen i naturlig størrelse.

54.

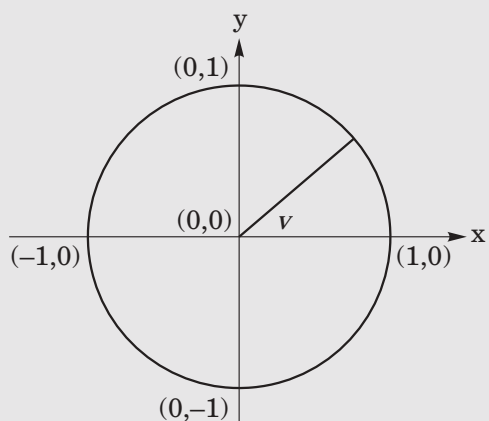


go065-24.cdr

Et spær skal fremstilles i jernrør.

- Hvor mange meter rør skal der bruges i alt?
- Beregn arealet af det skraverede område. $R = 20$ mm og $r = 17$ mm.
- Beregn rørets samlede masse (helt antal gram).

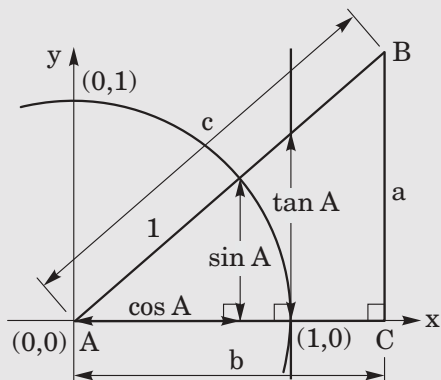
Enhedscirklen



go065-25.cdr

I et koordinatsystem med centrum i $(0,0)$ og en radius på 1 tegnes en cirkel. Cirklen skærer akserne i punkterne $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ og $0,-1$.

Denne cirkel er en enhedscirkel.



go065-26.cdr

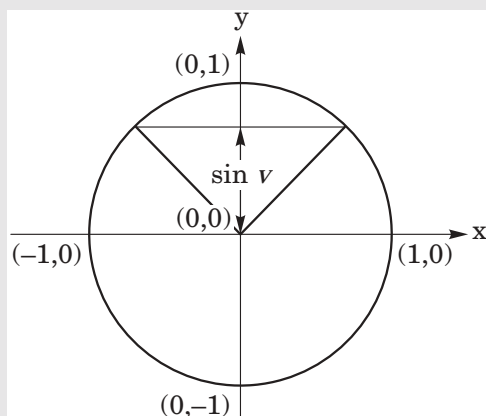
Tegningen viser 3 ensvinklede trekanter, som kan anvendes til opstilling af følgende forhold:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c} \Rightarrow \sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{modstående side}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\frac{\cos A}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow \cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{hosliggende side}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\frac{\tan A}{a} = \frac{1}{b} \Rightarrow \tan A = \frac{a}{b} = \frac{\text{modstående side}}{\text{hosliggende side}}$$

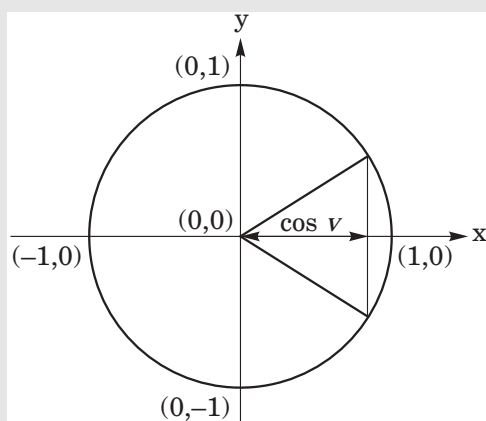
Sinus



Vi afsætter en vilkårlig vinkel v .
Vi kan finde talværdien til sinus v ved at måle direkte på y -aksen.
På tegningen ses det, at der kan være 2 vinkler til 1 sinusværdi.

go065-27a.cdr

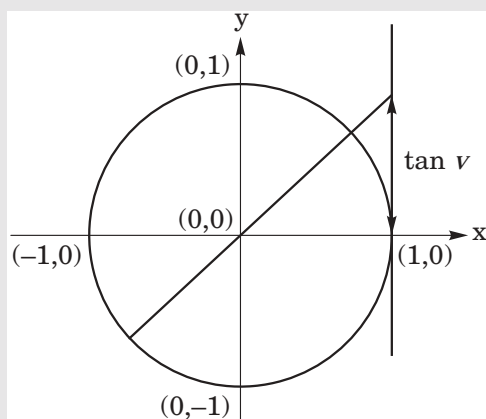
Cosinus



Vi afsætter en vilkårlig vinkel v .
Vi kan finde talværdien til cosinus v ved at måle direkte på x -aksen.
På tegningen ses det, at der kan være 2 vinkler til 1 cosinusværdi.

go065-27b.cdr

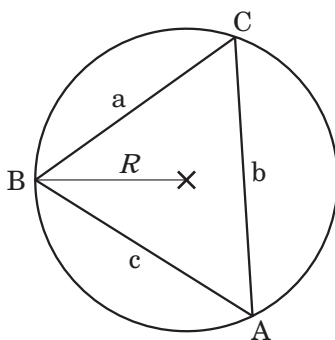
Tangens



Vi afsætter en vilkårlig vinkel v .
I punktet $(1,0)$ laves en tangent til enheds-cirklen.
Længden af linjestykket fra $(1,0)$ og til vinklens skæring med tangenten defineres som tangens v .
Vi kan finde talværdien til tangens v ved at måle direkte på tangenten fra $(1,0)$ og til skæring med vinklen.
På tegningen ses det, at der kan være 2 vinkler til 1 tangensværdi.

go065-27c.cdr

Vilkårlige trekanter



go065-28.cdr

Formler

Sinusrelationen

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Cosinusrelationerne

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

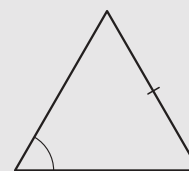
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

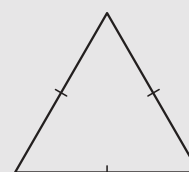
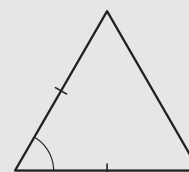
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



+ 1 oplysning

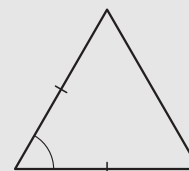


Arealformler

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$$

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$$

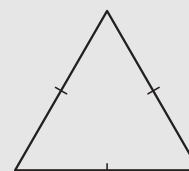
$$\text{Areal} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$



Hérons formel

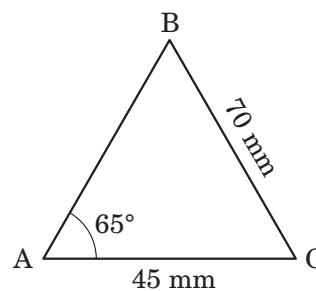
$$\text{Areal} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{Hvor } s = \frac{a+b+c}{2}$$



Opgaver

55. $A = 65^\circ$, $a = 70$ mm og $b = 45$ mm.
Beregn siden c og vinklerne B og C .



go065-30.cdr

Opgave 55

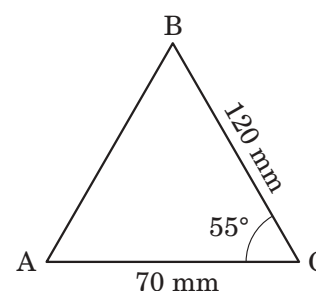
56. $A = 38,5^\circ$, $B = 47,2^\circ$ og $a = 123$ mm.
Find vinkel C og siderne b og c .

57. $C = 35,2^\circ$, $b = 67$ mm og $c = 45$ mm.
Beregn vinklerne A og B og siden a .

58. $a = 120$ mm, $b = 70$ mm og $C = 55^\circ$.
Beregn siden c og vinklerne A og B .

59. $A = 95^\circ$, $b = 52$ mm og $c = 77$ mm.
Beregn siden a og vinklerne B og C .

60. $a = 140$ mm, $b = 209$ mm og $c = 183$ mm.
Beregn vinklerne A , B og C .



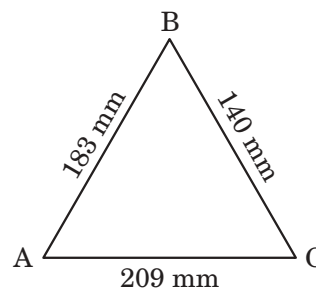
go065-31.cdr

Opgave 58

61. I $\triangle ABC$ er givet: $a = 80$ mm, $b = 120$ mm
og $c = 150$ mm.
Beregn trekantens areal.

62. I $\triangle ABC$ er givet: $a = 72$ mm, $b = 115$ mm
og $C = 120,5^\circ$.
Beregn $\triangle ABC$'s areal

63. I $\triangle ABC$ er givet: $A = 128^\circ$, $b = 54$ mm
og $c = 63$ mm.
Beregn trekantens areal

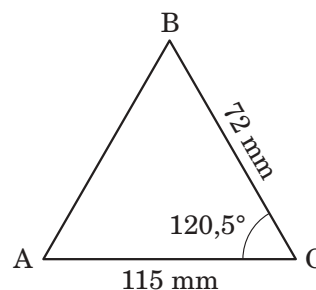


go065-32.cdr

Opgave 60

64. I $\square ABCD$ er $AB = 23$ mm, $BC = 26$ mm,
 $AC = 32$ mm, $D = 38^\circ$ og $AD = CD$.
Find firkantens ubekendte sider, vinkler samt
areal.

65. Konstruktion.
a. Konstruer en trekant ABC , hvor $AC = 70$ mm,
 $AB = 100$ mm og vinkel $A = 25^\circ$.
b. Tegn trekant ABC 's omskrevne cirkel.
c. Beregn cirkelens radius.
d. Beregn trekant ABC 's areal.

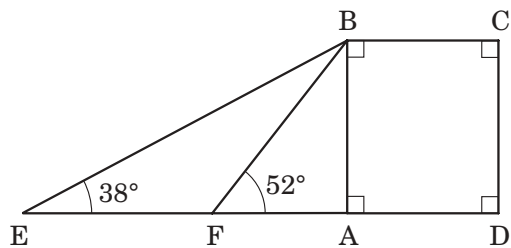


go065-33.cdr

Opgave 62

66. Arealet af rektanglet ABCD ønskes bestemt.

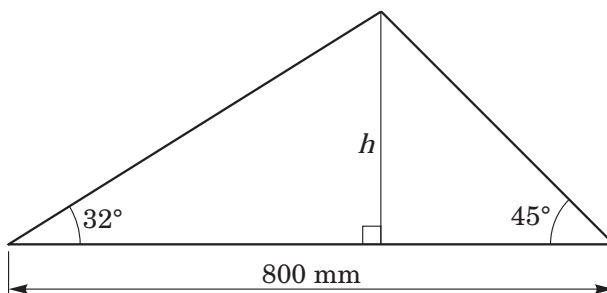
$|EF| = 250$ mm og $|AD| = 200$ mm.



go065-34.cdr

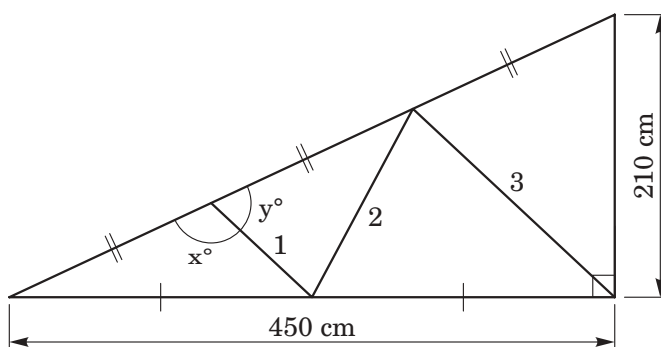
67. Nedenfor ses en tegning af en plade, der skal fremstilles i 6 mm aluminium.

Beregn pladens masse (helt antal gram).



go065-35.cdr

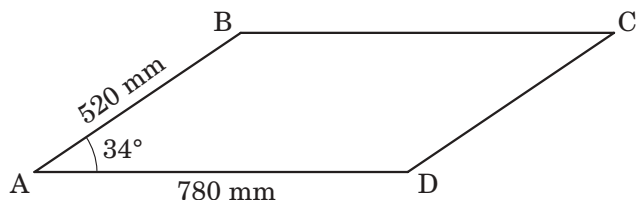
68. Nedenfor ses et gitterspær udført i stålrør.



go065-36.cdr

- Lav en tegning af spæret i målestoksforholdet 1:20.
- Beregn længden af stængerne 1, 2 og 3 (1 decimal).
- Kontroller resultaterne med tegning (bemærk vinkel x og y).

69. Et stykke 6 mm jernplade har form som et trapez og mål som på tegningen.



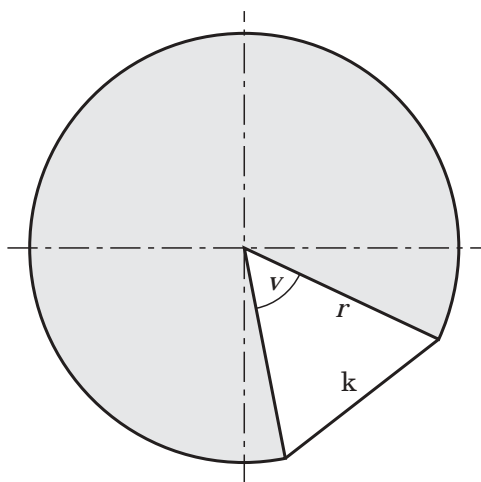
go065-37.cdr

- Beregn diagonalen AC (facit angives med 1 decimal).
- Beregn arealet af trapezet ABCD.
- Beregn pladens masse (facit angives i helt antal gram).

□

Temaopgaver

Udfoldet kegle



go067-01.cdr

Kegle 1

I kegle 1 er $r = 1\,135$ mm og $k = 965$ mm.

1. Beregn udsnittsvinklen (v).
2. Beregn højden i keglen.
3. Beregn keglens rumfang.
4. Hvor meget plade går der til den krumme overflade?

Kegle 2

I kegle 2 er $v = 54^\circ$ og $r = 1\,135$ mm.

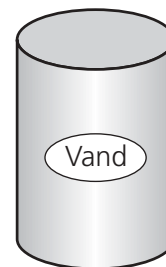
5. Beregn kordelængden k .
6. Beregn højden i keglen.
7. Beregn keglens rumfang.
8. Hvor meget plade går der til den krumme overflade?

Kegle 1 og 2

9. Hvilken af keglerne har det største rumfang?
10. Hvilken af keglerne har den største krumme overflade?

Vandbeholder

1. I skal fremstille en arbejdstegning af en lukket vandbeholder. Tegningen fremstilles i retvinklet projektion. Tegningen skal vise beholderen set forfra, fra oven, og der skal tegnes et snitbillede (snittet lægges i beholderens midtlinje).



2. Når beholderen er helt fyldt, skal den kunne rumme 1 250 l vand, og diameteren skal være 850 mm udvendig.
3. Materialer: Hvilken tykkelse plade? Sort eller rustfast stål?
4. Udregn pladeforbrug og pris. Beregn vægten af beholderen, når den er tom, og når den er fuld af vand.
5. Hvor mange arbejdstimer skal I bruge for at fremstille beholderen? Arbejds løn? Hvad bliver beholderens samlede pris?
6. Beskriv den arbejdsrækkefølge, I vil følge ved fremstilling af beholderen.
7. Skriv om sikkerhed og arbejdsmiljø ved fremstilling af beholderen.
8. Kvalitetsbedømmelse.

Hvad synes I skal være i orden for at sige, at beholderens kvalitet er ok? Der er altid fordele og ulemper ved at træffe et valg, så derfor:

Begrund de valg, I foretager!

□

Massefylde

Massefyldetabel

Stof	Formel	Massefylde
Aluminium	Al	2,7
Bly	Pb	11,34
Guld	Au	19,3
Jern	Fe	7,86
Diamant	C	3,51
Kobber	Cu	8,92
Krom	Cr	6,2
Kviksølv	Hg	13,55
Magnesium	Mg	1,74
Mangan	Mn	7,4
Messing	Cu,Zn	7,13
Nikkel	Ni	8,5
Platin	Pt	21,45
Sølv	Ag	10,5
Tin	Sn	7,31
Vanadium	V	5,5
Wolfram	W	19,1
Zink	Zn	7,14
Uran	U	18,7

Massefylde måles i g/cm^3 eller kg/dm^3 eller t/m^3 .

Massefylde, masse og vægt

$$\text{Masse} = \text{rumfang} \cdot \text{massefylde}$$



Masse måles med en skålvægt.
Massen afhænger ikke af tyngdekraften.
Massen af et kilogramslod er ens overalt på jorden.
På månen har et 1 kg lod massen 1 kg.

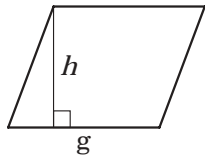


Vægt måles med en fjedervægt.
vægt er afhængig af tyngdekraften.
Vægten af et 1 kg lod er forskellig ved polerne og ved ækvator.

go069-01.cdr

□

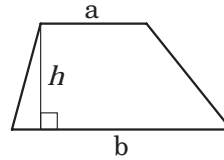
Formelsamling



Parallelogram

højde h
grundlinie g
areal A

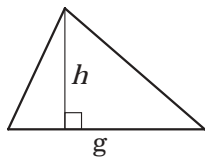
$$A = h \cdot g$$



Trapez

højde h
 a og b er parallelle
areal A

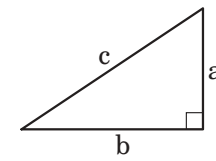
$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b)$$



Trekant

højde h
grundlinie g
areal A

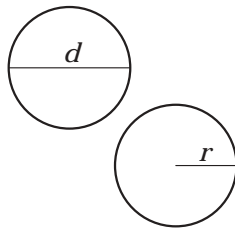
$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$



Retvinklet trekant

hypotese c
kateder a og b

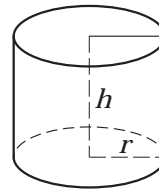
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ c^2 + a^2 &= b^2 \\ c^2 - b^2 &= a^2 \end{aligned}$$



Cirkel

radius r
diameter d
areal A
omkreds O

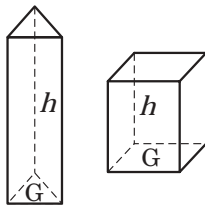
$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot r^2 \\ O &= 2 \cdot \pi \cdot r^2 \quad (O = \pi \cdot d) \end{aligned}$$



Cylinder

højde h
grundfladeradius r
krumme overflade O
rumfang V

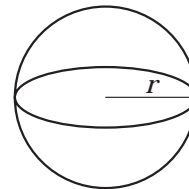
$$\begin{aligned} O &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \\ V &= \pi \cdot r^2 \cdot h \end{aligned}$$



Prisme

højde h
grundflade G
rumfang V

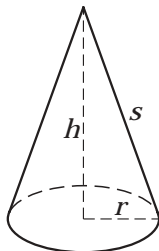
$$V = h \cdot G$$



Keglestub

radius r
overflade O
rumfang V

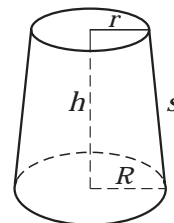
$$\begin{aligned} O &= 4 \cdot \pi \cdot r^2 \\ V &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \end{aligned}$$



Kegle

højde h
sidelinje s
grundfladeradius r
krumme overflade O
rumfang V

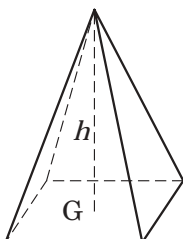
$$\begin{aligned} O &= \pi \cdot r \cdot s \\ V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \end{aligned}$$



Keglestub

højde h
sidelinje s
grundfl.radier r og R
krumme overflade O
rumfang V

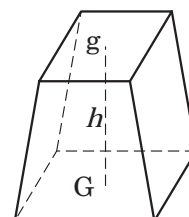
$$\begin{aligned} O &= \pi \cdot s \cdot (R + r) \\ V &= \frac{1}{3} h (G + g + \sqrt{Gg}) \end{aligned}$$



Pyramide

højde h
grundflade G
rumfang V

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot G$$



Pyramidestub

højde h
grundflader G og g
rumfang V

$$V = \frac{1}{3} h (G + g + \sqrt{Gg})$$

□

Facitliste

Afvigelser fra facitlistens tal kan bl.a. skyldes afrundinger. Brug derfor facitlisten med fornuft. Listen må ikke opfattes som et udtryk for indiskutable sandheder.

Plangeometri

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $A = 12\text{m}^2$
$O = 14\text{ m}$
$A = 11,78\text{ m}^2$
$O = 16,2\text{ m}$ | 14. $A = 644,03\text{ mm}^2$ | 6. a. $162,5\text{ cm}^3$
b. $422,5\text{ g}$ |
| 2. $A = 144\text{ m}^2$
$O = 48\text{ m}$ | 15. $A = 1,28\text{m}^2$ | 7. $1\,277,25\text{ g}$ |
| 3. $O = 30\text{ m}$
$A = 56,25\text{ m}^2$ | 16. $A = 8\,937\text{ mm}^2$ | 8. a. $1\,224\text{ cm}^3$
b. $1\,193,8\text{ cm}^3$
c. $19\,008\text{ cm}^3$ |
| 4. $A = 22,95\text{ m}^2$
$A = 875\text{ m}^2$ | 17. $A = 2\,088,27\text{ mm}^2$ | 9. a. $19\,905,13\text{ cm}^3$
b. $840,99\text{ dm}^3$
c. $1,99\text{ m}^3$ |
| 5a. $O = 50,27\text{ m}$
$A = 201,06\text{ m}^2$ | 18. $A = 3\,301,63\text{ mm}^2$ | 10. a. $530,14\text{ liter}$
b. $505,63\text{ kg}$ |
| 5b. $O = 128,81\text{ m}$
$A = 1\,320,25\text{ m}^2$ | 19. $O = 1\,555,27\text{ mm}$
$A = 83\,181,87\text{ mm}^2$ | 11. $1,24\text{ dm}$ |
| 6. $A = 382\,800\text{ mm}^2$ | 20. $A = 58\,093,81\text{ mm}^2$ | 12. $1,1\text{ liter}$ |
| 7. $A = 1\,000\text{ mm}^2$ | 21. a. 14 cm
b. $87,96\text{ cm}$ | 13. a. $1,9242\text{ cm}^2$
b. $481,05\text{ cm}^3$
c. $3\,781,1\text{ g}$
d. $950,33\text{ cm}^3$
e. $855,3\text{ g}$ |
| 8. $A = 1,28\text{ m}^2$ | 22. $r = 62,15\text{ mm}$ | |
| 9. $A = 19,5\text{ cm}^2$ | 23. a. $86\,275,99\text{ mm}^2$
b. $442,44\text{ mm}$ | |
| 10. $A = 1,86\text{ m}^2$ | 24. $879\,645,94\text{ mm}^2$
$75\,398,22\text{ mm}^2$ | |
| 11a. $d = 12\text{ mm}$
$O = 37,7\text{ mm}$
$A = 113,1\text{ mm}^2$ | 25. $587\,085,13\text{ mm}^2$ | |
| 11b. $d = 20\text{ mm}$
$O = 62,83\text{ mm}$
$A = 314,16\text{ mm}^2$ | 26. $11,63\%$ | |
| 11c. $d = 32\text{ mm}$
$O = 100,53\text{ mm}$
$A = 804,25\text{ mm}^2$ | | |
| 12. $A = 1\,608,50\text{ mm}^2$
$A = 615,75\text{ mm}^2$ | | |
| 13. a. $102\,400\text{ mm}^2$
b. $80\,424,77\text{ mm}^2$
c. $21\,975,23\text{ mm}^2$ | | |

Rumgeometri

- | | |
|--|---|
| 1. $33\,000\,000\text{ mm}^3$ | 14. $17\,038,11\text{ g}$ |
| 2. a. $4\,352\,000\text{ mm}^3$
b. $187\,200\text{ mm}^2$ | 15. Kobber |
| 3. $3\,375\,000\text{ mm}^3$ | 16. $2\,303,5\text{ g}$ |
| 4. a. $17,58\text{ cm}^3$
b. $1\,157\,625\text{ mm}^3$
c. $0,51\text{ m}^3$
d. $1\,728\text{ dm}^3$ | 17. 426 liter |
| 5. a. 3 mm
b. 5 cm
c. 23 mm
d. $6,5\text{ cm}$
e. 13 m | 18. a. $376,99\text{ cm}^3$
b. $2,7\text{ g/cm}^3$
c. Aluminium |
| | 19. $282,74\text{ g}$ |
| | 20. $7\,841\text{ m}^3$ |
| | 21. a. $136,71\text{ mm}$
b. $54\,577,32\text{ mm}^2$ |
| | 22. $2,31\text{ dl}$ |

Rørlængder

1,5" 1 067,16 mm

1" 1 017,13 mm

3/4" 1 379,70 mm

Konstruktion2. 1 trekant = 180° 2 trekanter = 360° 3 trekanter = 540° 4 trekanter = 720° 8 trekanter =
 $1\ 440^\circ$ 98 trekanter =
 $17\ 640^\circ$

3. e. Ja

4. 45° 5. 30° 6. 75° 7. 81° og 18° 8. a. 40° b. 98° 9. a. 20° b. 120° c. 100° d. 60° 10. 65° 11. 80° 12. 107° 13. a. 67° b. 110°

14. Nej

15. 60° 16. 90° , 45° , 45° 17. 75° og 75° 75° 18. $C = 65^\circ$ $B = 35^\circ$ 19. a. 130° b. 30° c. 60° d. 70° e. $216\ 220\ \text{mm}^2$ 20. a. 60° , 30° , 60°

b. 125,24 g

27. $AB = 13,8\ \text{cm}$

29. b. 38 mm

c. $O = 238,76\ \text{mm}$ $A = 4\ 536,46\ \text{mm}^2$ 31. $B = 140^\circ$ $C = 40^\circ$ $D = 140^\circ$ **Pythagoras**

1. 10 50 8,6

6,1 11,8 7,4

2. 9,8 3,9 11,7

3. 57,3

 $9\ 671\ \text{mm}^2$

4. 12,3

4,29

164,72 m

5. 12,65 m

10,57 m

5,8 m

6. $9\ 526\ \text{mm}^2$

7. a. 105 mm

b. $32\ 900\ \text{mm}^2$

c. 820 mm

d. $14\ 700\ \text{mm}^2$

8. 69,28 mm

9. 121,6 mm

10. a. $900\ 000\ \text{mm}^2$

b. 3 800 mm

11. $O = 348,8\ \text{mm}$ $A = 3\ 524\ \text{mm}^2$

12. 135,6 mm

13. a. $3\ 036,8\ \text{mm}^2$ b. $18\ 430,68\ \text{mm}^3$

14. A og D

15. Nej

16. Rektangel

Trigonometri

1. b

2. a

3. a

4. b

5. A

6. B

7. A og C

8. B og C

9. $BC = 49,61\ \text{mm}$ $DE = 70,19\ \text{mm}$

10. 0,71

11. Vinkel 18° :

0,3090

0,9511

0,3249

Vinkel 37° :

0,6018

0,7986

0,7536

Vinkel 58° :

0,8480

0,5299

1,6003

Vinkel 89° :

0,9998

0,0175

57,2900

Trigonometri fortsat

- | | | |
|----------------------|-------------------|------------------------------|
| 12. a. $13,62^\circ$ | 28. 7,36 | 40. a = 3,82 mm |
| b. $67,62^\circ$ | 48° | b = 5,11 mm |
| c. 30° | 8,17 | 41. A = $54,3^\circ$ |
| d. $76,38^\circ$ | 29. 75° | a = 26,86 dm |
| e. $22,38^\circ$ | 14,93 | c = 33,07 dm |
| f. 60° | 15,45 | 42. A = $63,89^\circ$ |
| g. $13,25^\circ$ | 30. $32,58^\circ$ | B = $26,11^\circ$ |
| h. $42,76^\circ$ | 10,95 | c = 28 mm |
| i. $26,57^\circ$ | 57,42° | 43. A = $7\,975\text{ mm}^2$ |
| 13. a. 0,2807 | 31. 5,86 | 44. h = 5,49 m |
| b. 0,4509 | 17,02 | 45. v = $7,94^\circ$ |
| c. 0,9842 | 19° | 46. k = 140,66 mm |
| d. 0,9770 | 32. 2,27 | 47. v = 11° |
| e. 0,3795 | 63° | 48. L = 112,1 mm |
| f. 0,0715 | 4,46 | 62,12 mm |
| g. 0,2382 | 33. $41,81^\circ$ | 113,22 mm |
| h. 22,0217 | 48,19° | 49. n = 20 mm |
| 14. $55,71^\circ$ | 4,47 | 50. 2,43 m |
| 15. $27,89^\circ$ | 34. 30,94 | 13,52 m |
| 16. $83,99^\circ$ | 61° | 51. 214,5 mm |
| 17. 0,805 | 27,06 | 52. x = $16,89^\circ$ |
| 18. $36,5^\circ$ | 35. $32,23^\circ$ | 53. a = 49,75 mm |
| 19. 0,15 | 12,69 | 54. a. 16,03 m |
| 20. $87,3^\circ$ | 57,77° | b. $348,72\text{ mm}^2$ |
| 21. 836,4 | 36. 11,08 | c. 43 937 g |
| 22. 89° | 14,18 | 55. B = $35,64^\circ$ |
| 23. 1,353 | 52° | C = $79,36^\circ$ |
| 24. 48 710,27 | 37. 9,35 | c = 75,91 mm |
| 25. 3,1 | 36,65° | 56. C = $94,3^\circ$ |
| 26. $38,68^\circ$ | 5,58 | b = 144,97 mm |
| 51,32° | 38. b = 6,40 cm | c = 197,03 mm |
| 6,24 | c = 14,11 cm | 57. A = $85,68^\circ$ |
| 27. 13,95 | B = 27° | B = $59,12^\circ$ |
| 55° | 39. c = 13 cm | a = 77,84 mm |
| 11,43 | A = $22,62^\circ$ | 58. A = $89,11^\circ$ |
| | B = $67,38^\circ$ | B = $35,89^\circ$ |
| | | c = 98,31 mm |

Trigonometri fortsat

59. $B = 32,43^\circ$
 $C = 52,57^\circ$
 $a = 96,6 \text{ mm}$
60. $A = 41,18^\circ$
 $B = 79,42^\circ$
 $C = 59,4^\circ$
61. $A = 4\,781,15 \text{ mm}^2$
62. $A = 3\,567,14 \text{ mm}^2$
63. $A = 1\,340,41 \text{ mm}^2$
64. $AD = 49,14 \text{ mm}$
 $CD = 49,14 \text{ mm}$
 $A = 124,43^\circ$
 $B = 81,3^\circ$
 $C = 116,27^\circ$
 $A = 1\,038,89 \text{ mm}^2$
65. $r = 55,64 \text{ mm}$
 $A = 1\,479,16 \text{ mm}^2$
66. $100\,269,5 \text{ mm}^2$
67. $m = 1\,994 \text{ g}$
68. $1 = 102,6 \text{ cm}$
 $2 = 158,8 \text{ cm}$
 $3 = 205,2 \text{ cm}$
69. $AC = 1\,245,5 \text{ mm}$
 $A = 226\,808,64 \text{ mm}^2$
 $m = 10\,696 \text{ g}$

Svejsefuger

1. $A = 109,15 \text{ mm}^2$
 $m = 1,373 \text{ kg/m}$
2. $A = 102,35 \text{ mm}^2$
 $m = 1,689 \text{ kg/m}$

□